

**МИР**  
**знаний**

Н. Я. ВИЛЕНКИН

# Функции в природе и технике



# **ОГЛАВЛЕНИЕ**

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

**3**

## **КАК ВОЗНИКЛО И РАЗВИВАЛОСЬ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ**

**5**

## **ОТ ЖЕРТВЕННИКА ДО РАДИОЛОКАТОРА**

**27**

## **НАУКА О БЕСКОНЕЧНОМ**

**45**

## **В ПОИСКАХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ**

**87**

## **ЗАКОНЫ ОРГАНИЧЕСКОГО РОСТА И ВЫРАВНИВАНИЯ**

**115**

## **МАТЕМАТИКА КОЛЕБАНИЙ**

**148**

## **КАК СТАЛ РАБОТАТЬ «ГИБРИД МЕЖДУ БЫТИЕМ И НЕБЫТИЕМ»**

**177**

**Н**ачиная с VI класса в центре внимания школьной математики находятся понятия функции, ее графика, производной и интеграла. Учащиеся узнают о существовании и свойствах показательной и тригонометрических функций, о логарифмической функции, о производной и интеграле, о решении задач на экстремум и т. д. Однако размеры школьного учебника не позволяют показать в сколько-нибудь полном объеме все многообразие задач, требующих для своего решения функционального подхода, использования могучего аппарата дифференциального и интегрального исчислений. Нет времени и изложить историю возникновения и развития этих вопросов математики.

Предлагаемая вниманию читателя книга задумана как рассказ о практических приложениях изучаемых в школе функций и связанных с ними понятий. В нее включены также многие вопросы, относящиеся к истории математики. Книга состоит из семи разделов, посвященных возникновению и развитию понятия о функции, свойствам конических сечений, развитию основных идей дифференциального и интегрального исчислений, решению оптимизационных задач, свойствам и приложениям показательной функции, тригонометрическим функциям и колебаниям и, наконец, некоторым вопросам, связанным с функциями комплексной переменной.

Автор стремился по возможности не перегружать изложение выкладками и вести рассказ в неформальном стиле. При этом он считал вполне допустимым использование наводящих рассуждений, применение наглядного

«языка бесконечно малых», столь популярного в прошлом и отвергнутого из-за своей недостаточной строгости. Автор находит извинение такому подходу в словах знаменитого русского ученого академика А. Н. Крылова, который рекомендовал «не считать недостаточно «строгим» для 16-летнего гимназиста, например, то, на чем сам Ньютон обосновал все современное учение о мироздании и что он положил в основу своих неопровержимых доказательств строения системы мира», а утонченную строгость доказательств рассматривал как «торжество науки над здравым смыслом». Аналогичных взглядов придерживались и такие физики, как Альберт Эйнштейн, академик Л. Д. Ландау и многие другие.

Замечания и пожелания по этой книге надо направлять по адресу: Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

*Н. Я. Виленкин*

## КАК ВОЗНИКЛО И РАЗВИВАЛОСЬ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

**П**исцы и таблицы. Понятие функции уходит своими корнями в ту далекую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Они еще не умели считать, но уже знали, что, чем больше оленей удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода, чем сильнее натянута тетива лука, тем дальше полетит стрела, чем дольше горит костер, тем теплее будет в пещере.

С развитием скотоводства и земледелия, ремесла и обмена увеличилось количество известных людям зависимостей между величинами. Многие из них выражались с помощью чисел. Это позволило формулировать их словами «больше на», «меньше на», «больше во столько-то раз». Если за одного быка давали 6 овец, то двух быков обменивали на 12 овец, а трех быков — на 18 овец; если из одного ведра глины изготавливали 4 горшка, то из двух ведер глины можно было сделать 8 горшков, а из трех ведер — 12 горшков. Такие расчеты привели к возникновению понятия о пропорциональности величин.

В те времена редко приходилось сталкиваться с более сложными зависимостями. Но когда возникли первые цивилизации, образовались большие (по тогдашним масштабам) армии, началось строительство гигантских пирамид, то понадобились писцы, которые учитывали поступающие налоги, определяли количество кирпичей, необходимое для возведения дворцов, подсчитывали, сколько продовольствия надо заготовить для дальних походов. От одного поколения писцов к другому пере-

ходили правила решения задач, и чем лучше писец справлялся с ними, тем большим почетом он пользовался.

Вот, например, послание, направленное египетским писцом своему менее образованному коллеге:

«Я хочу объяснить тебе, что это такое, когда ты говоришь: «Я писец, дающий приказы армии». Ты приходишь ко мне, спрашиваешь о запасах для солдат и говоришь: «Сосчитай мне это». Ты оставляешь свою работу, и на мои плечи сваливается задача — учить тебя, как ее надо выполнить. Я ставлю тебя в тупик, когда приношу тебе повеление от твоего господина, тебе — его царскому писцу... мудрому писцу, поставленному во главе этого войска. Должно сделать насыпь для подъема в 730 локтей длины и 55 локтей ширины. Она состоит из 120 отдельных ящиков и покрывается перекладинами и тростником. На верхнем конце она имеет высоту в 60 локтей, а в середине 30 локтей; уклон ее — дважды по 15 локтей, а настил — 5 локтей. Спрашивают у военачальников, сколько понадобится кирпичей, и у всех писцов, и ни один ничего не знает. Все они надеются на тебя и говорят: «Ты искусный писец, мой друг, сосчитай это для нас поскорей. Смотри, имя твое славится. Сколько же надо для этого кирпичей?»

Чтобы решить такую задачу, надо было знать, как зависят объемы геометрических фигур от их размеров, уметь учитывать наклон насыпи. Некоторые египетские задачи показывают, что в то время умели даже вычислять объем пирамиды.

Высокого уровня достигла математика в Древнем Вавилоне. Чтобы облегчить вычисления, вавилоняне составили таблицы обратных значений чисел, таблицы квадратов и кубов чисел и даже таблицы для суммы квадратов чисел и их кубов. Говоря современным языком, это было табличное задание функций

$$y = \frac{1}{x}, y = x^2, y = x^3, y = x^2 + x^3.$$

Пользуясь такими таблицами, вавилоняне могли решать и обратные задачи — по заданному объему куба находить длину его стороны, т. е. извлекать кубические корни. Они умели даже решать уравнения вида  $x^3 + x^2 = a$ . Были у вавилонян и таблицы функций двух переменных, например таблицы сложения и умножения. Пользуясь различными таблицами, они могли вычислять

и длину гипотенузы по длинам катетов, т. е. находить значения функции  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Разумеется, путь от появления таблиц до создания общего понятия функциональной зависимости был еще очень долг, но первые шаги по этому пути уже были сделаны.

В Древней Греции наука приняла иной характер, чем в Египте и Вавилоне. Появились профессиональные ученые, которые изучали саму математическую науку, занимались строгим логическим выводом одних утверждений из других. Многие из того, что делали древнегреческие математики, тоже могло привести к возникновению понятия о функции. Они решали задачи на построение и смотрели, при каких условиях данная задача имеет решение, изучали, сколько решений может иметь эта задача, и т. д. Древние греки нашли много различных кривых, неизвестных писцам Египта и Вавилона, изучали зависимости между отрезками диаметров и хорд в круге, эллипсе и других линиях.

Но все же древнегреческие математики не создали общего понятия функции. Возможно, здесь оказало влияние то, что к практическим приложениям математики они относились свысока. Одна из дошедших до нас легенд гласит, что когда какой-то человек попросил Евклида обучить его геометрии и задал вопрос: «А какую практическую пользу я получу, выучив все эти теоремы?», тот сказал, обращаясь к своему рабу: «Дай ему обол (мелкую греческую монету), бедняжка пришел нскать пользу».

Вопросами практической математики в Греции больше занимались астрономы. Они придумали, например, долготу и широту, с помощью которых определяли положение звезд на небосводе. Астрономам приходилось решать сферические треугольники. Это послужило началом сферической тригонометрии, которая, как ни странно, была создана раньше, чем плоская. Чтобы решать тригонометрические задачи, пришлось составить таблицы зависимости между длиной хорды и величиной стягиваемой ею дуги. По сути дела, это уже были таблицы функции  $y = \sin x$  (длина хорды, стягивающей дугу  $2x$ , равна  $2R \sin x$ ).

Когда византийский император Юстиниан в 529 году н. э. запретил под страхом смертной казни математические исследования (он видел в них наследие языческой

науки, противостоявшей христианской религии), центр научных исследований переместился в арабские страны. Арабские ученые ввели новые тригонометрические функции и усовершенствовали таблицы хорд, составленные Птолемеем. Работая с тригонометрическими таблицами, они прибегали к интерполяции, т. е. к «чтению между строк таблицы». Чаще всего применяли линейную интерполяцию, считая, что между двумя известными значениями функция меняется линейно. Но живший в XI веке хорезмиец аль-Бируни разработал более точный способ интерполяции, основанный на замене данной функции квадратичной. Он применил свой способ только к таблицам синусов и тангенсов, но в одном месте указал, что этот способ «применим ко всем таблицам». Здесь впервые встречается мысль о «всех таблицах», т. е. о всевозможных зависимостях между величинами.

**Графическое изображение зависимостей.** Исследование общих зависимостей началось в XIV веке. Средневековая наука была чисто словесной, она опиралась на рассуждения, высказывания древних философов или на цитаты из религиозных книг. Поэтому и научные результаты выражались словесно как утверждения о связи между собой различных качеств предметов. Тогда же возникла научная школа, которая утверждала, что качества могут быть более или менее интенсивными (платье человека, свалившегося в реку, мокрее, чем у того, кто лишь попал под дождь).

Французский ученый Николай Оресм стал изображать интенсивности длинами отрезков. Когда он располагал эти отрезки перпендикулярно некоторой прямой, их концы образовывали линию, названную им «линией интенсивностей» или «линией верхнего края». Современный читатель сразу узнает в ней график соответствующей функциональной зависимости. Оресм изучал даже «плоскостные» и «телесные» качества, т. е. функции, зависящие от двух или трех переменных.

Важным достижением Оресма была попытка классифицировать получившиеся графики. Он выделил три типа качеств: *равномерные* (т. е. с постоянной интенсивностью), *равномерно-неравномерные* (для которых скорость изменения интенсивности постоянна) и *неравномерно-неравномерные* (все остальные), а также указал характерные свойства графиков таких качеств.



В работах Оресма и его предшественника Суайнсхеда встречаются понятия мгновенной скорости и ускорения. Оресму удалось даже с помощью геометрических соображений найти путь, проходимый телом при равноускоренном движении. Разумеется, точного определения мгновенной скорости и ускорения он не давал, но понимал, что путь при равноускоренном движении можно геометрически изобразить площадью треугольника.

Идеи Оресма намного обогнали тогдашний уровень науки. Чтобы развивать их дальше, нужно было уметь выражать зависимости между величинами не только графически, но и с помощью формул, а буквенной алгебры в то время не существовало. Лишь после того, как в течение XVI века была постепенно создана буквенная алгебра, удалось сделать следующий шаг в развитии понятия функции.

**Переменные величины.** На протяжении XVI и XVII веков в естествознании произошла революция, приведшая к глубочайшим изменениям не только в технике, но и в мировоззрении людей. После того как Коперник создал гелиоцентрическую систему, «остановив Солнце и двинув Землю», нельзя уже было верить, что Земля — центр мироздания, а библейские сказания непогрешимы. Казалось, что мир сорвался со своих опор, что разрываются прочнейшие связи.

Астрономия, которая до этого в основном обслуживала астрологию (лженауку, пытавшуюся предсказывать судьбы людей и государств по положению планет и звезд), стала чуть не каждый день приносить новые сведения о мире — люди узнали о спутниках Юпитера, фазах Венеры, пятнах на Солнце и т. д. Инженеры придумывали новые машины, усовершенствовали часы, мореплаватели возвращались из дальних странствий и рассказывали о новых континентах и таинственных странах, которые они открыли во время путешествий.

Все это привело к изменению мировоззрения людей — они стали смотреть на мир не как на поле приложения божественной воли, а как на механизм, управляемый своими законами. И основной задачей науки стало открытие этих законов, описание их в терминах математики. Перед математикой возникли новые задачи, недоступные для существовавшей тогда науки, имевшей дело лишь с постоянными, неподвижными объектами. Нужны были новые математические методы, которые

позволили бы описывать мир, полный движения и перемен.

Одним из первых задумался над такими задачами основатель динамики Галилео Галилей (1564—1642). Он размышлял о том, как меняется скорость падающего тела, как движется точка на ободе колеса, как качается маятник. Но решить такие задачи ему удалось лишь в простейших случаях. Чтобы создать математический аппарат для изучения движений, понадобилось понятие переменной величины.

Это понятие было введено в науку французским философом и математиком Рене Декартом (1596—1650). Жизнь Декарта до того, как он начал заниматься научными исследованиями, была весьма бурной: получив образование в иезуитском коллеже, он сначала вел рассеянную жизнь светского человека в Париже, потом стал наемным солдатом в войсках голландского полководца Морица Нассауского, принимал участие в битвах Тридцатилетней войны, а вернувшись во Францию, участвовал в осаде гугенотской крепости Ла-Рошели, знакомой читателям по роману Александра Дюма «Три мушкетера». Но потом он оставил военную службу и погрузился в занятия наукой.

Еще во время военной службы Декарт пришел к идеям о единстве алгебры и геометрии и о роли переменных величин. Значение его работ Фридрих Энгельс охарактеризовал следующим образом:

«Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем»<sup>1</sup>.

Декарту удалось уничтожить пропасть, лежавшую со времен древнегреческой математики, между геометрией и арифметикой. После того как в школе Пифагора открыли существование несоизмеримых отрезков, был наложен запрет на использование чисел в геометрии. Вместо этого греческие математики применяли отношения отрезков, плоских фигур и пространственных тел,

---

<sup>1</sup> Энгельс Ф. Диалектика природы. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. 2-е изд., т. 20, с. 573. Далее все цитаты даны по этому изданию.

не выражая их числами. Действия над числами в такой геометрической алгебре заменяли действиями над отношениями; вместо произведения чисел греки говорили о площади прямоугольника, построенного на данных отрезках, а произведение трех чисел истолковывали как объем прямоугольного параллелепипеда. Разумеется, ни о произведении более чем трех чисел, ни о сложении «площадей» с «объемами» в этой алгебре не было и речи. Любопытно, однако, что греческий математик Папп, живший в III веке н. э., писал: «... не существует ничего, что заключало бы больше, чем три измерения. Однако незадолго до нас стали позволять себе выражаться подобным образом, не указывая, впрочем, при этом что-нибудь сколько-нибудь вразумительное».

Чтобы освободить алгебру от несвойственного ей геометрического языка, Декарт ввел фиксированный единичный отрезок и стал рассматривать отношения других отрезков к нему. По сути дела, эти отношения были не чем иным, как положительными действительными числами. Благодаря такому подходу произведение двух чисел  $x$  и  $y$  удалось выразить не как площадь прямоугольника со сторонами  $x$  и  $y$ , а как длину  $z$  отрезка, где  $z : x = y : 1$ . Это позволило рассматривать и выражения, в которых слагаемые имели разные степени, например:  $x + 2y^2$ .

Декарт считал, что в основе познания лежит сравнение между собой предметов одинакового рода, их измерение, а главная роль «человеческого искусства» состоит в установлении равенств между искомыми и данными вещами. При этом отношение между вещами выражалось через отношение их мер, т. е. по сути дела через действительные числа. Тем самым, зависимости между величинами стали выражаться как зависимости между числами. Это была неявно выраженная идея числовой функции числового аргумента.

При записи зависимостей между величинами Декарт стал применять буквы. При этом операциям над величинами соответствовали операции над буквами. Теперь уже для преобразования одной зависимости в другую не надо было писать громоздкие пропорции, изучать подобные треугольники и преобразовывать геометрические фигуры. Достаточно было по твердо установленным правилам делать алгебраические преобразования, при-

чем все эти преобразования производились в общем виде.

**Кривые и уравнения.** Отношения между известными и неизвестными величинами Декарт выражал в виде уравнений. Чтобы наглядно изображать уравнения, он заменял все величины длинами отрезков. По сути дела, здесь была заложена идея метода координат. Как уже говорилось, еще греческие астрономы задавали положение звезд на небесной сфере долготой и широтой. Но лишь Декарт начал геометрически изображать не только пары чисел, а и уравнения, связывающие два числа. Одновременно с Декартом к мысли о соответствии между линиями и уравнениями пришел другой французский математик — Пьер Ферма (1601—1665). Он был советником тулузского парламента и занимался математическими исследованиями лишь в свободное время. Тем не менее Ферма получил ряд первоклассных результатов в теории чисел и в других областях математики.

После работ Декарта и Ферма возникла аналитическая геометрия — новая ветвь математики, в которой линии изучались не геометрическими методами, а путем исследования их уравнений.

**Алгебраические и трансцендентные кривые.** К началу XVII века математики знали такие кривые линии, как эллипс, гиперболу, параболу и т. д. Однако в то время еще не было общего метода изучения линий, и потому исследование каждой кривой превращалось в сложную научную работу.

Открытия Декарта и Ферма дали в руки математиков метод для получения и изучения новых кривых — надо было написать уравнение кривой и делать выводы, исследуя это уравнение. Сам Декарт в 1638 году придумал новую кривую, уравнение которой имеет вид  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ,  $a > 0$  (рис. 1). Ее сейчас называют *декартовым листом*. Любопытно, что хотя Декарт применял уже в своей алгебре не только отрицательные, но даже мнимые числа, он не рассматривал отрицательных значений координат. Первоначально декартов лист считали симметричным относительно осей координат (рис. 2), т. е. изображали линию  $|x|^3 + |y|^3 - 3a|xy| = 0$ . Окончательно форма кривой была установлена лишь через полстолетия Х. Гюйгенсом (1629—1695) и Иоганном Бернулли (1667—1748).

Декартов лист, эллипс, гипербола, парабола явля-

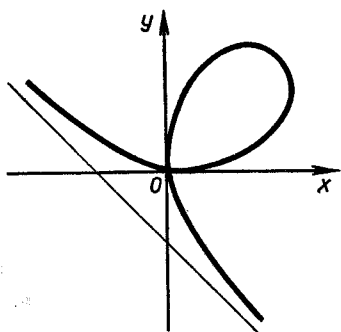


Рис. 1

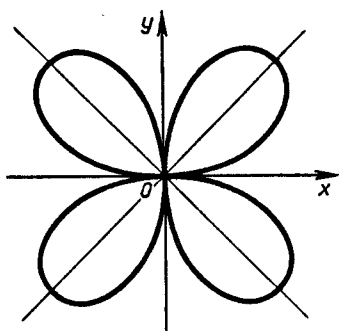


Рис. 2

ются алгебраическими кривыми. Так называют кривые, уравнение которых имеет вид  $P(x, y) = 0$ , где  $P(x, y)$  — многочлен от  $x$  и  $y$ . Но уже Галилей и Декарт изучали циклоиду — кривую, описываемую точкой обода колеса, катящегося без скольжения по прямой дороге (или, говоря математически, траекторию точки окружности, катящейся без скольжения по прямой линии). Эта кривая состоит из бесконечного числа арок, каждая из которых соответствует полному обороту колеса (рис. 3). Можно доказать, что уравнение одной арки циклоиды имеет вид

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2}.$$

Так как в это уравнение входит обратная тригонометрическая функция, циклоида не является алгебраической кривой.

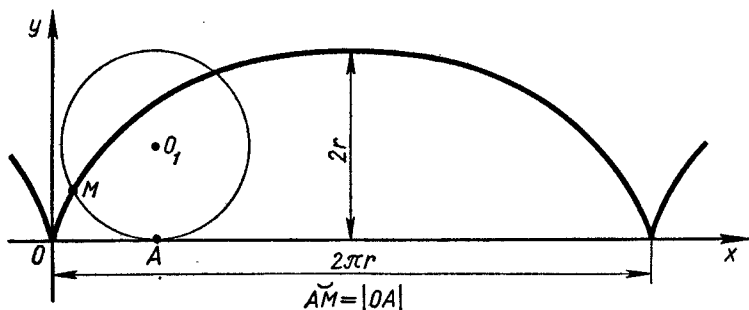


Рис. 3

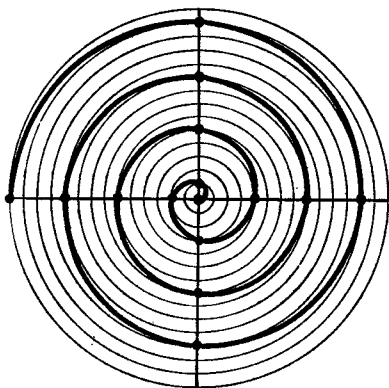


Рис. 4

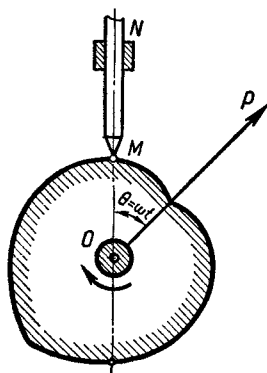


Рис. 5

К неалгебраическим кривым нельзя было применять алгебраические методы, разработанные Декартом. Поэтому их называли трансцендентными кривыми (от латинского «трансценденс» — выходящий за пределы). Некоторые трансцендентные кривые были известны еще древнегреческим математикам. Например, в связи с задачей о спрямлении окружности (построении отрезка, длина которого равна длине этой окружности) Архимед построил особую спираль, определив ее на языке механики как траекторию точки, совершающей равномерное и поступательное движение по лучу, который в это же время равномерно вращается вокруг своего начала (рис. 4).

Другие кривые кинематического происхождения приходилось рассматривать астрономам. Как известно, великий астроном древности Птолемей, пытаясь объяснить движение планет по небу, придумал сложную систему мироздания. Он считал, что в центре Вселенной находится Земля; а планеты равномерно вращаются по окружностям, центры которых, в свою очередь, равномерно вращаются вокруг Земли. Если начертить эти траектории, то появятся возвратные движения и петли, которые и хотел объяснить Птолемей. Следует отметить, что при более точном изучении выявились расхождения между теорией Птолемея и наблюдениями, а потому пришлось вводить третьи окружности, а там и четвертые. В результате получилось нагромождение окружностей, в кото-

ром невозможно было разобраться. Король Альфонс X, которому попытался объяснить систему Птолемея, сказал: «Жаль, что меня не было, когда бог творил мир: я посоветовал бы ему сделать мироздание проще». Столь непочтительное заявление чуть не стоило ему короны — его обвинили в богохульстве.

Но не только «небесные» причины заставляли математиков изучать различные кривые. Со многими кривыми приходилось иметь дело и в связи с вполне земными заботами. Картографы интересовались формой меридианов и параллелей при различном выборе проекции земного шара на плоскость, мореплаватели — линией, по которой корабль пересекает все меридианы под одним и тем же углом, инженеры — очертаниями зубчатых колес, кулачковых механизмов и других деталей машин, а также винтовыми кривыми и поверхностями и т. д.

Например, архимедова спираль позволяет преобразовать равномерное вращательное движение в равномерное возвратно-поступательное движение. Для этого надо изготовить эксцентрик, профиль которого состоит из двух дуг архимедовой спирали (рис. 5). При равномерном вращении этого эксцентрика стержень  $NM$ , скользящий концом по его профилю, равномерно движется то вверх, то вниз (у архимедовой спирали расстояние  $|OM|$  пропорционально величине угла поворота).

У такого эксцентрика есть недостаток — из-за заострений в точках пересечения спиралей скорость движущейся точки меняется при изменении направления скачком, что приводит к ударам и быстрому разрушению машины. Поэтому предпочитают гладкие эксцентрики, очерченные по так называемой *улитке Паскаля*. Она получается, если из точки  $O$ , лежащей внутри окружности, опустить перпендикуляры на каждую касательную к окружности и взять кривую, состоящую из оснований этих перпендикуляров (рис. 6). Если очертить эксцентрик по улитке Паскаля, то скорость будет меняться плавно, причем равномерное вращательное движение экс-

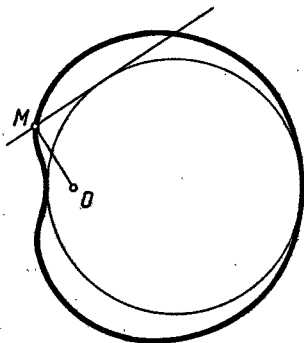


Рис. 6

центрика преобразуется в гармонические колебания стержня (относительно таких колебаний см. с. 155).

После того как были открыты логарифмы, стали изучать свойства графиков логарифмической и показательной зависимостей. Задачи механики требовали отыскания формы провисшего каната (так называемой *цепной линии*). Поиски кривой, длина дуги которой пропорциональна разности длин векторов, проведенных в ее концы, привели к открытию *логарифмической спирали*. В течение XVII столетия было открыто больше кривых, чем за всю предшествующую историю математики, и понадобились общие понятия, которые позволили бы единым образом трактовать и изучать как алгебраические, так и трансцендентные кривые, как тригонометрические, так и логарифмические зависимости. Выработка этих общих понятий, а именно понятий производной, интеграла и бесконечного ряда, ознаменовала новый этап математики — открытие дифференциального и интегрального исчисления. Об этом будет изложено позже, а здесь расскажем, как было введено общее понятие функции и какие изменения оно потом претерпело.

**Рождение термина.** После того как в науку вошли переменные величины, были изучены траектории движущихся точек, расцвела вычислительная математика и была создана буквенная алгебра. Внимание ученых обратилось к изучению соответствий между величинами. С помощью координат удалось изобразить эти соответствия графически. Математика стала языком естествознания, причем в формулировке законов природы использовали не только алгебраические, но и тригонометрические функции.

В своей «Геометрии» Декарт писал: «Придавая линии<sup>1</sup>  $y$  последовательно бесконечное множество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений  $x$  и, таким образом, получим бесконечное количество различных точек...; они опишут требуемую кривую линию». Здесь ясно выражена идея функциональной зависимости величин  $y$  и  $x$ , идея геометрического выражения этой зависимости, или, как мы сказали бы теперь, графика функции.

Но у Декарта, как и у его современников, понятие функции было изложено на языке геометрии или меха-

---

<sup>1</sup> Современный математик сказал бы «переменной».



ники. Это объясняется тем, что запас функций, которые использовали в то время математики для выражения физических законов, был очень узок. Даже логарифмы воспринимались лишь как средство вычислений, а не как значения логарифмической функции. Чтобы охватить с единой точки зрения различные случаи зависимости величин друг от друга, понадобилось новое, весьма общее понятие.

В науке часто бывает так, что ученые длительное время применяют в неявном виде некоторое понятие. Однако из-за отсутствия названия оно встречается под различными личинами, а одни и те же рассуждения повторяются каждый раз заново. И лишь когда оно получает имя, все замечают, что уже давно работали с ним. Так случилось, например, с терминами «предел», «отображение», а на нашей памяти с такими понятиями, как «обратная связь», «информация» и т. д. Введение нового термина приводит к уточнению соответствующего понятия, освобождению его от всего случайного и несущественного, к выяснению общности рассуждений, проводившихся независимо друг от друга в различных областях науки.

Так случилось и после того, как в конце XVII века Лейбниц (1646—1716) и его ученики стали применять термин «функция». Вначале этот термин употребляли еще в очень узком смысле слова, связывая лишь с геометрическими образами. Речь шла об отрезках касательных к кривым, их проекциях на оси координат и о «другого рода линиях, выполняющих для данной фигуры некоторую функцию» (от латинского «функтус» — выполнять). Таким образом, понятие функции еще не было освобождено от геометрической формы.

Лишь И. Бернулли дал определение функции, свободное от геометрического языка: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Оно привело в восхищение престарелого Лейбница, увидевшего, что отход от геометрических образов знаменует новую эпоху в изучении функций.

Определение Бернулли опиралось не только на работы Лейбница и его школы, но и на исследования великого математика и физика Исаака Ньютона (1643—1727), который изучил колоссальный запас самых различных функциональных зависимостей и их свойств. Вместо сло-

ва «функция» Ньютон применял термин «ордината». Он сводил изучение геометрических и физических зависимостей к изучению этих «ординат», а сами «ординаты» описывал различными аналитическими выражениями.

Чтобы определение функции, данное И. Бернулли, стало полноценным, надо было условиться, какие способы задания функций следует считать допустимыми. Обычно считали, что допускаются функции, заданные выражениями, в которые входят числа, буквы, знаки арифметических действий, возведения в степень и извлечения корней, а также обозначения тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных и логарифмических функций. Такие функции называли *элементарными*. Вскоре выяснилось, что интегралы от них не всегда выражаются через элементарные функции. В связи с этим пришлось добавить новые функции, получающиеся при вычислении интегралов от элементарных функций, при решении дифференциальных уравнений и т. д. Многие из этих функций нельзя было явно выразить с помощью ранее известных операций. Поэтому один из самых замечательных математиков XVIII века Леонард Эйлер (1707—1783), вводя в своем учебнике понятие функции, говорит лишь, что «когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых». В одной из работ он даже говорит о графике функции как о кривой, начерченной «свободным влечением руки».

Книги Эйлера содержат результаты исследований Лейбница и его учеников, а также многочисленные результаты самого автора (полное собрание сочинений Эйлера состоит из нескольких десятков громадных томов). Они сыграли важную роль в освобождении математического анализа от языка геометрии и механики. В них впервые теория тригонометрических функций была изложена без ссылки на геометрию, а показательная и логарифмическая функции стали равноправными с алгебраическими. Все книги Эйлера пронизывает идея, что математический анализ есть наука о функциях, что «весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных количеств и их функций».

**Спор о функции.** К середине XVIII века ученые решили многие задачи механики, связанные с движением отдельных точек. Математикам и астрономам удалось

точно предсказать год, когда на небе вновь засияет комета Галлея. До этого астрономы могли предсказывать лишь лунные и солнечные затмения, да и то не путем вычислений, а на основе предшествующих наблюдений. Эйлеру удалось справиться с труднейшей задачей о движении Луны, которую давно мечтали решить многие математики, — от этого решения зависело точное вычисление долгот, необходимое для мореплавателей.

Хотя не все задачи механики точек были решены (а некоторые из них, например задача о движении трех точек, притягивающих друг друга по закону Ньютона, не решены и поныне), в центре внимания математиков оказались проблемы механики сплошных тел: колебания струн, мембран и стержней, распространение волн в жидкостях и газах, тепла в стержнях и кольцах и т. д.

Простейшей из этих проблем было изучение колебаний струны. Их закон определяется функцией двух переменных  $u = f(x, t)$ , показывающей отклонение точки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . Решая эту задачу, Эйлер доказал, что если вначале все точки струны находились в состоянии покоя, а колебания вызваны отклонением струны от положения равновесия, то решение имеет вид

$$u = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)). \quad (1)$$

Здесь  $\varphi(x)$  — отклонение струны в точке  $x$  при  $t=0$ ,  $\varphi(x) = u(x, 0)$ .

За год до Эйлера такое же решение получил иным способом французский математик Даламбер (1717—1783). Между Эйлером и Даламбером вспыхнул спор о том, как надо толковать найденное ими решение. Дело в том, что первоначальное отклонение струны могло на различных участках задаваться различными выражениями. Например, если приподнять струну за середину, то она примет вид равнобедренного треугольника (рис. 7), и функция будет выражаться так:

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ a(l-x), & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2)$$

Эйлер считал эту форму задания начального условия законной и полагал, что найденное им решение относится

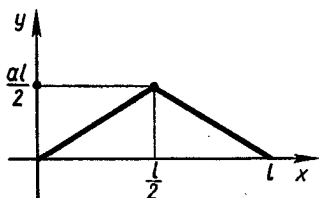


Рис. 7

и к таким случаям. Даламбер же требовал, чтобы начальное условие задавалось лишь одним выражением для всех значений  $x$ .

Спор Эйлера с Даламбером был в самом разгаре, когда в него вмешался еще один математик — Даниил Бернулли (1700—1782), один из крупней-

ших знатоков того времени в области теории упругости. Он дал решение задачи о колебаниях струны с закрепленными концами и длиной  $l$  в виде бесконечной суммы:

$$u(x, t) = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots, \quad (3)$$

где коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  — функции от времени.

Сам Д. Бернулли был убежден, что его решение охватывает самый общий случай, но с ним не согласились ни Эйлер, ни Даламбер. Эйлер ошибочно считал, что это решение не может быть общим, так как не верил, что одна и та же функция может выражаться и несколькими формулами (как, например, (2)), и одной формулой (3). Ведь это противоречило общему мнению математиков того времени, считавших, что два различных выражения не могут задавать одну и ту же функцию. Ни Эйлер, ни Д. Бернулли не сумели доказать справедливость своей точки зрения. Поэтому в конце XVIII века математики, давая определение функции, уклонялись от ответа на вопрос, как же она выражается. Например, французский математик Лакруа (1765—1843) писал: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применить, чтобы перейти от них к первому». Таким образом, Лакруа уже не отождествлял понятия функции и ее аналитического выражения.

**Сущность и кажимость функции.** Окончательный разрыв между понятиями функции и ее аналитического выражения произошел в начале XIX века. Французскому математику Фурье (1768—1830) удалось доказать, что любые встречающиеся в практических вопросах функции, имеющие период  $2l$ , можно представить в виде суммы

бесконечного ряда, похожего на ряд (3), но содержащего еще члены с косинусами и свободный член и имеющего постоянные коэффициенты. Хотя такие ряды употреблялись еще в XVIII веке, их стали называть *рядами Фурье*, поскольку он показал все многообразие их применений. При этом условия, необходимые для разложимости функции в ряд Фурье, были таковы, что им удовлетворяла, например, функция, график которой получается из графика, изображенного на рисунке 7, путем центральной симметрии относительно начала координат и последующего периодического продолжения на всю ось. Позднее Фурье и его последователи, среди которых следует отметить русского ученого М. В. Остроградского (1801—1862), изучили еще более общие разложения функций в ряды и применения таких разложений для решения задач математической физики.

После работы Фурье стало ясно, что несущественно, каким аналитическим выражением задана функция, что это только, как говорят философы, кажимость (от слова «казаться»). А существо дела в том, какие значения принимает функция при заданных значениях аргумента. После длительного уточнения этой идеи, в котором приняли участие Фурье, Н. И. Лобачевский (1792—1856), немецкий математик Дирихле (1805—1859) и другие ученые, общепризнанным стало следующее определение:

*Переменная величина  $y$  называется функцией переменной величины  $x$ , если каждому значению величины  $x$  соответствует единственное определенное значение величины  $y$ .*

Интерес Н. И. Лобачевского и Дирихле к определению понятия функции был связан с тем, что они занимались вопросом о разложении функций в ряды Фурье, обобщив условия разложимости, которые дал Фурье.

**Тератология функций.** Указанное выше определение функции было очень общим и, как часто бывает в математике, охватывало гораздо больше объектов, чем этого хотелось его авторам. Например, под это определение попадает и введенная Дирихле функция:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция была совсем непохожа на изучавшиеся в XVIII веке. Самое малое изменение значения  $x$  может

превратить рациональное число в иррациональное, а иррациональное в рациональное и тем самым резко изменить значение функции. Иными словами, на сколь угодно малом отрезке эта функция принимает и значение 0, и значение 1, а потому ее график невозможно нарисовать. В то же время ясно, что  $D(0,75) = 1$ , а  $D(\sqrt{2}) = 0$ . Разумеется, такая функция не может возникнуть в каком-либо практическом вопросе именно из-за «неустойчивости» своих значений. Дирихле пытался выяснить, могут ли такие всюду разрывные функции быть разложены в ряды Фурье, но не смог получить ответа на этот вопрос.

В течение 25 лет после появления работы Дирихле изучение столь «патологических» функций не вызывало особого интереса. Во всяком случае, когда немецкий математик Бернгардт Риман (1826—1866) вновь занялся изучением подобных функций, он писал:

«При всем несовершенстве наших знаний о том, как изменяются в бесконечно малом силы и состояния материи в зависимости от места и времени, все же мы можем с уверенностью сказать, что те функции, на которые не распространяются условия Дирихле, в природе не встречаются. Тем не менее нужно думать, что случаи, не рассмотренные Дирихле, заслуживают внимания по двум причинам. Во-первых, как указывает сам Дирихле в заключение своей работы, этот вопрос стоит в теснейшей связи с основными принципами исчисления бесконечно малых и может служить для того, чтобы придать этим принципам большую ясность и определенность. С этой точки зрения исследование упомянутых случаев представляет непосредственный интерес.

Во-вторых, область применения рядов Фурье не ограничивается одними лишь физическими задачами; эти ряды применяются теперь с успехом также в области чистой математики, а именно в теории чисел, и можно думать, что здесь как раз те функции, представимость которых с помощью тригонометрических рядов не была выяснена Дирихле, должны играть важную роль».

Научный авторитет Римана был очень велик. Поэтому после появления его работы возник интерес к функциям со столь необычным поведением. Но эти исследования приветствовались далеко не всеми учеными. Математики классического направления считали, что наука не должна иметь дело с объектами, столь далекими от реального мира. Их мнение об исследованиях функций, подобных

функциям Дирихле  $D(x)$ , или функций, нигде не имеющих производной (их график имеет излом в каждой точке), ярко выразил один из крупнейших математиков того времени Анри Пуанкаре (1854—1912). Он сказал: «Раньше, когда изобретали новую функцию, то имели в виду какую-нибудь практическую цель. Теперь их изобретают, не извлекая из них никакой пользы, а только для того, чтобы обнаружить недостатки в рассуждениях наших отцов». Еще резче выразился на эту тему руководитель французской математики конца XIX века Шарль Эрмит (1822—1901), который написал своему другу голландскому математику Стильтесу (1856—1894), что он «с ужасом и отвращением отворачивается от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производной». Новую математику, математику разрывных функций, классики называли «тератологией» функций (наукой об уродствах функций).

Но молодежь тянулась к новым областям науки, не обращая внимания на ворчание математиков предыдущего поколения. Во Франции их вдохновляли лекции Жюль Таннери (1848—1910) и Камилла Жордана (1838—1922), строивших курс математического анализа на твердой основе точных определений, безупречных доказательств и железной логики. Они усваивали на этих лекциях, что хотя разрывные функции и не встречались в существовавших тогда приложениях математики, их надо изучать, так как этого требуют правильно понимаемые интересы математики. Эти идеи накапливались, переходили в убеждения, становились стимулом к научной работе. И в 1898 году молодой французский ученый Ренэ Бэр (1874—1932) защитил диссертацию, в которой дал глубокую классификацию разрывных функций. В том же году появилась книга одного из самых ярких лидеров молодежи двадцатисемилетнего математика Эмиля Бореля (1871—1956), посвященная новой теории функций. Замечательные работы по интегрированию разрывных функций написал Анри Лебег (1875—1941), начинавший в то время свою научную деятельность.

Интерес к разрывным функциям не ограничивался Францией. Активнейшую роль в этих исследованиях играли русские математики. Глубокие свойства разрывных функций открыли Д. Ф. Егоров (1869—1931) и Н. Н. Лузин (1883—1950). Лузин стал основателем московской школы теории функций действительного пере-

менного, которую ее участники называли «Лузитанией».

**Функции, отображения и соответствия.** Но и определение функции, восходящее к Лакруа и Фурье, Лобачевскому и Дирихле, стало казаться математикам второй половины XIX века недостаточно строгим и общим. Изопренные в исследовании функций, не заданных никаким аналитическим выражением, функций, нигде не имеющих производной, они подвергли сомнению слова «переменная величина», входившие в это определение. Ведь понятие переменной величины было не столько математическим, сколько физическим, его трудно было пояснить, не прибегая к наглядным образам. А главное, это определение говорило лишь о числах, о соответствиях между числами. Но если отказаться от аналитического задания функций, то можно рассматривать соответствия между любыми объектами. Ведь даже когда дают имена вещам, то устанавливают соответствие между множеством вещей и множеством имен. А при вычислении площадей фигур, длин линий, объемов тел устанавливают соответствия между геометрическими фигурами и числами.

Столь общий подход к понятию функции, при котором отождествляются понятия функции, отображения, оператора, мог возникнуть лишь после того, как во второй половине XIX века было введено общее понятие множества. И именно творцы теории множеств Г. Кантор (1845—1918) и Р. Дедекинд (1831—1916) дали общее определение отображения. Его можно сформулировать:

Пусть  $X$  и  $Y$  — два множества; говорят, что задано **отображение**  $f$  множества  $X$  в множество  $Y$ , если для каждого элемента  $x$  из  $X$  указан соответствующий ему элемент  $y$  из  $Y$ . Этот элемент  $y$  называют **образом элемента**  $x$  при отображении  $f$  и обозначают  $f(x)$ . Таким образом, числовые функции числового аргумента являются отображениями одного числового множества в другое. Введение в математику общего понятия об отображении множеств позволило прояснить и ряд вопросов, относящихся к функциям, например уточнить, что такое обратная функция, сложная функция и т. д.

В начале XX века на базе теории функций возникла иная **ветвь математики** — **функциональный анализ**. В нем изучают множества, состоящие из функций, последовательностей, линий, в которых определены опера-



ции сложения и умножения на числа. Эти операции обладают свойствами, похожими на свойства операций над векторами. Однако в отличие от нашего пространства, имеющего лишь три измерения, изучаемые в функциональном анализе пространства могут быть бесконечномерными. Это не мешает специалистам по функциональному анализу применять в своих исследованиях геометрический язык.

В функциональном анализе спокойно говорят об ортогональных системах функций, обобщая тем самым на функции привычное понятие перпендикулярных (ортогональных) векторов, разлагают по таким системам функций любую другую так же, как геометры разлагают векторы по базисным векторам, используют понятие расстояния точки от гиперплоскости и т. д. Это использование геометрического языка позволяет делать наглядными применявшиеся ранее методы математического анализа, использовать геометрическую интуицию для решения тех проблем, где ранее ей не было места.

Разумеется, тот факт, что работать приходится в бесконечномерном пространстве, налагает свой отпечаток и приводит к тому, что для некоторых построений функционального анализа нет аналогов в обычной геометрии. Например, известный американский математик Н. Винер построил в бесконечномерном пространстве спираль, для которой касательные, проведенные в любых двух точках, перпендикулярны друг другу. Но несмотря на причудливость такого геометрического образа, он оказался очень полезным при изучении столь важного для практики раздела математики, как теория случайных процессов.

Хотя функциональный анализ кажется очень абстрактной наукой, он находит многочисленные приложения в вычислительной математике, физике, экономике, позволяя с единой точки зрения трактовать самые различные вопросы и вскрывать геометрическую сущность проблем, которые на первый взгляд очень далеки от геометрии. Говоря о связи абстрактной науки с практикой, видный математик Р. Курант (1888—1972) писал:

«Мы стартуем с Земли и, сбросив балласт излишней информации, устремляемся на крыльях абстракции в заоблачные высоты, разреженная атмосфера которых облегчает управление и наблюдение. Затем наступает решающее испытание — приземление; теперь нужно установить, достигнуты ли поставленные цели...»

А Лебег говорил:

«Те люди, которым мы обязаны отвлеченной научной мыслью, могли, занимаясь абстрактными вещами, делать тем не менее полезное дело, именно потому, что они имели особенно обостренное чувство действительности».

В XX веке понятие функции подверглось дальнейшим обобщениям. Возникло понятие функции, отражавшее свойства физических величин, сосредоточенных в отдельных точках, на линиях или поверхностях. Потребности физики привели к изучению функций, принимавших случайные значения (например, числа телефонных разговоров, состоявшихся в течение данного промежутка времени). Но методы математического анализа позволили справиться и с проблемами теории случайных функций, нашедшей многочисленные приложения в физике и технике.

Но как бы далеко ни отходило то или иное обобщение понятия функции от казавшихся столь наивными определений Бернулли и Эйлера, к каким бы сложным объектам оно ни прилагалось, в основе всех замысловатых построений лежала одна и та же мысль о существовании взаимозависимых величин, знание значения одной из которых позволяет найти значение другой величины. И поскольку измерение величин является отправным пунктом всех применений математики, а математика в значительной степени является наукой о взаимосвязи величин, то в ходе развития понятия функции нашел свое отражение беспрестанный процесс эволюции математики, которая все время включает в себя новые проблемы, обрабатывает их, отбрасывает устаревшие, и, таким образом, все вновь и вновь омолаживается.

Жизненные соки математики поступают в нее из корней, которые уходят своими бесчисленными разветвлениями в реальность, т. е. в механику, в физику, биологию, экономику и т. д. И если какая-то область математики в своем развитии разливается на множество мелких ручьев, превращаясь в хаос запутанных частных, единственным лекарством является возвращение к истокам, т. е. новое приближение к более или менее явным эмпирическим идеям. Это всегда было необходимым условием сохранения свежести и жизненной силы математики.

**Конические сечения.** Древнегреческие геометры знали лишь несколько линий, отличных от прямых и окружностей. Большинство из них они изучали в связи с тремя знаменитыми задачами древности: об удвоении куба, о трисекции угла и о квадратуре круга. О том, почему они заинтересовались удвоением куба, рассказывают следующую легенду.

Однажды на острове Делосе вспыхнула эпидемия чумы. Дельфийский оракул, к которому обратились жители острова, сказал, что для прекращения эпидемии надо вдвое увеличить золотой кубический жертвенник в храме Аполлона в Афинах. Островитяне собрали золото и изготовили новый жертвенник, ребра которого были вдвое больше ребер прежнего. Однако чума не прекратилась и разгневанные жители указали оракулу на его ошибку. В ответ они слышали, что неверно поняли предписание — удвоить надо было не ребра, а объем куба, т. е. увеличить ребра куба в  $\sqrt[3]{2}$  раз. Поскольку греческие математики применяли лишь геометрическую алгебру, они ставили эту задачу иначе: по данному отрезку  $a$  построить такие отрезки  $x$  и  $y$ , что  $a:x = x:y = y:2a$ . Легко видеть, что тогда длина отрезка  $x$  будет равна  $a\sqrt[3]{2}$ .

Попытки решить Делосскую задачу циркулем и линейкой к успеху не привели. Тогда геометры попытались решить эту задачу, определяя точки пересечения кривых, отличных от прямых и окружностей.

Геометр Мeneхм, живший в IV веке до н. э., предложил использовать для этой цели конические сечения, т. е. кривые, получающиеся при пересечении конуса плоскостью, перпендикулярной одной из образующих. Он

получил три различные кривые в зависимости от того, какой конус рассекал — остроугольный, прямоугольный или тупоугольный. Позднее их называли *эллипсом*, *параболой* и *гиперболой* (рис. 8).

Чтобы понять, как связаны эти кривые с Делосской задачей, заметим, что пропорцию  $a:x = x:y = y:2a$  можно переписать в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax. \end{cases} \quad (1)$$

Но  $x^2 = ay$  и  $y^2 = 2ax$  — это уравнения парабол, у одной из которых ось вертикальна, а у другой — горизонтальна. Поэтому достаточно найти точки пересечения этих парабол. Заметим еще, что из системы (1) вытекает равенство  $xy = 2a^2$ , а это — уравнение гиперболы. Поэтому ту же задачу можно решать, отыскивая точки пересечения параболы с гиперболой.

Наиболее интересные результаты о конических сечениях получил математик Аполлоний (III век до н. э.), живший в малоазиатском городе Пергаме. Он доказал, что все три кривые можно получить, пересекая один и тот же конус плоскостями, по-разному наклоненными к оси конуса. Если угол между осью конуса и его образующими равен  $\alpha$ , а угол между секущей плоскостью и осью равен  $\beta$ , то при  $\alpha < \beta$  плоскость пересекает все образующие конуса и в сечении получается замкнутая кривая — *эллипс* (рис. 9, а). Если же  $\alpha > \beta$ , то плоскость пересекает лишь часть образующих конуса. В этом случае Аполлоний продолжал все образующие конуса за его вершину и рассматривал сечение получившегося двухполостного конуса. Оно состоит из двух ветвей и называется *гипер-*

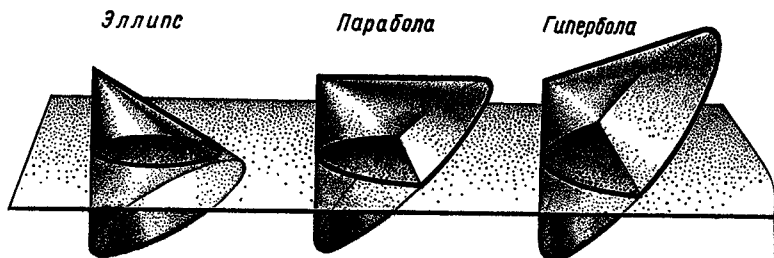


Рис. 8

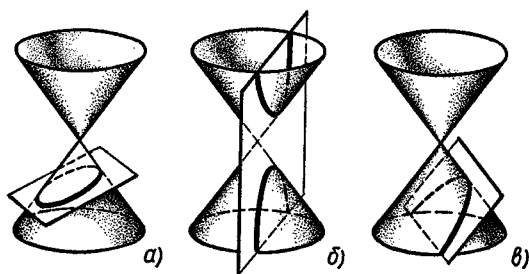


Рис. 9

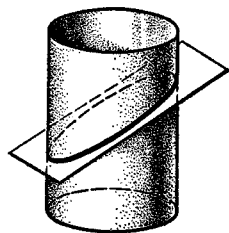


Рис. 10

болой (рис. 9, б). В промежуточном случае, когда  $\alpha = \beta$ , секущая плоскость пересекает лишь одну полость конуса, но параллельна одной из образующих. В этом случае получается кривая, называемая *параболой*, она состоит из одной уходящей в бесконечность ветви (рис. 9, в). Поэтому, если провести сначала сечение кругового конуса, перпендикулярное его оси, а потом поворачивать секущую плоскость, оставляя одну точку ее пересечения с конусом неподвижной, то увидим, как окружность будет сначала вытягиваться, потом вторая вершина эллипса уйдет в бесконечность и вместо эллипса получится парабола, а потом плоскость пересечет и вторую полость конуса и получится гипербола. Значит, парабола в некотором смысле слова является кривой, промежуточной между эллипсом и гиперболой.

**Свойства конических сечений.** Из определения эллипса, гиперболы и параболы как конических сечений следует, что все эти кривые являются «тенью окружности». Иными словами, если вырезать из бумаги круг и осветить его из некоторой точки, то тень круга на любой плоскости будет ограничена одним из конических сечений. Когда источник света бесконечно удален (с большой степенью точности таким источником можно считать Солнце), то тенью окружности будет *эллипс*, т. е. эллипс можно получить, пересекая плоскостью не конус, а прямой круговой цилиндр (рис. 10).

Перейдем к свойствам, связывающим расстояния точек конических сечений от некоторых прямых линий и точек. Для этого впишем в конус сферу, касающуюся секущей плоскости  $\pi$  (рис. 11). Обозначим через  $S$  окружность, по которой сфера касается конуса, а через  $F$

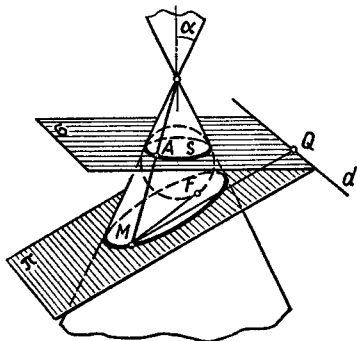


Рис. 11

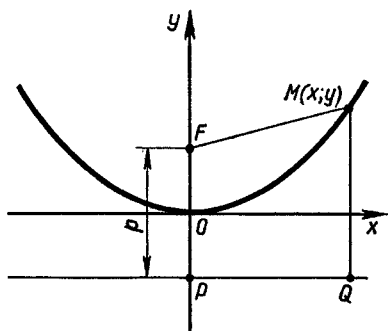


Рис. 12

точку касания этой сферы с секущей плоскостью. Наконец, через  $\sigma$  обозначим плоскость, в которой лежит окружность  $S$ , а через  $d$  — прямую, по которой пересекаются плоскости  $\sigma$  и  $\pi$ . Точку  $F$  назовем *фокусом* конического сечения, а прямую  $d$  — соответствующей ему *директрисой*.

Если вписать в конус сферу, касающуюся плоскости  $\pi$  снизу, то получим вторые фокус и директрису эллипса.

Докажем, что *отношение расстояния точки  $M$  конического сечения до фокуса к ее расстоянию до директрисы одно и то же для всех точек этого сечения*, т. е. что  $MF : MQ = \text{const}$ .

Для этого проведем через точку  $M$  образующую конуса и обозначим через  $A$  точку пересечения этой образующей с окружностью  $S$ . Ясно, что отрезки  $MA$  и  $MF$  касаются сферы, а потому их длины равны,  $MF = MA$ . Далее, проекции отрезков  $MA$  и  $MQ$  на ось конуса совпадают, так как эти отрезки имеют одно и то же начало  $M$ , а их концы  $A$  и  $Q$  лежат в одной и той же плоскости  $\sigma$ , перпендикулярной оси конуса. Но проекция отрезка  $MA$  на ось равна  $MA \cdot \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между осью конуса и его образующими, а проекция отрезка  $MQ$  на ту же ось равна  $MQ \cdot \cos \beta$ , где  $\beta$  — угол между осью конуса и секущей плоскостью.

Поскольку эти проекции совпадают, то  $MA \cdot \cos \alpha = MQ \cdot \cos \beta$ , откуда получаем, что  $MA : MQ = \cos \beta : \cos \alpha$ , т. е. что  $MF : MQ = \cos \beta : \cos \alpha$ . Так как углы  $\alpha$  и  $\beta$  не зависят от выбора точки  $M$ , наше утверждение доказано.

Доказанное свойство конических сечений называют директориальным свойством. С его помощью легко вывести уравнения этих сечений. Например, чтобы вывести уравнение параболы, выберем систему координат так, чтобы ось ординат проходила через фокус  $F$  параболы, а начало координат делило пополам перпендикуляр  $FP$ , опущенный из фокуса на директрису (рис. 12). Тогда для любой точки  $M(x, y)$  параболы име-

ем  $MQ = \left| y + \frac{p}{2} \right|$  и  $MF = \sqrt{x^2 + \left( y - \frac{p}{2} \right)^2}$ , где через  $p$  обозначена длина перпендикуляра  $FP$ . Значит,

$$\sqrt{x^2 + \left( y - \frac{p}{2} \right)^2} = \left| y + \frac{p}{2} \right|.$$

Отсюда получаем уравнение параболы в виде  $x^2 = 2py$ .

Эллипс и гипербола обладают, кроме того, фокальным свойством: сумма расстояний любой точки эллипса до его фокусов постоянна, а для каждой ветви гиперболы постоянна разность расстояний ее точек до фокусов. Иными словами, для эллипса  $MF_1 + MF_2 = \text{const}$ , а для гиперболы  $|MF_1 - MF_2| = \text{const}$ .

Чтобы доказать фокальное свойство эллипса, возьмем две сферы, касающиеся и конуса, и секущей плоскости (рис. 13). Тогда, как мы уже знаем, для любой точки  $M$  эллипса имеем  $MA_1 = MF_1$  и  $MA_2 = MF_2$ , а потому  $MF_1 + MF_2 = MA_1 + MA_2$ . Но  $MA_1 + MA_2$  — длина отрезка образующей, заключенного между параллельными окружностями  $S_1$  и  $S_2$ , а потому эта сумма постоянна. Следовательно, и  $MF_1 + MF_2 = \text{const}$ . Для гиперболы фокальное свойство доказывается точно так же, с той лишь разницей, что сферы лежат в разных полостях конуса.

Проведенные выше доказательства настолько геометричны, что могли бы принадлежать Менехму или Аполлонию. Однако они были придуманы лишь в начале XIX века бельгийским математиком Данделем.

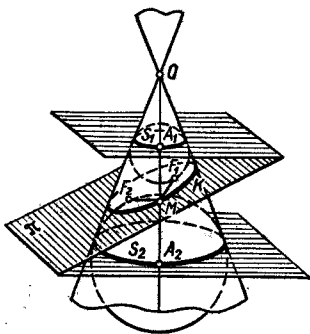


Рис. 13

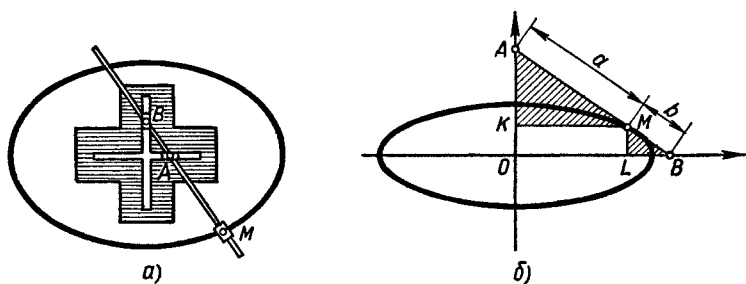


Рис. 14

ном (1794—1887). Дело в том, что греческие геометры старались не пользоваться стереометрическими рассуждениями при доказательствах свойств плоских фигур.

**Построение конических сечений.** Из фокального свойства эллипса вытекает следующий способ его построения. Надо взять лист бумаги, положить его на картон или фанеру и вбить два гвоздика в точки  $F_1$  и  $F_2$ , а потом привязать к обоим гвоздикам нить, длина которой больше расстояния между ними, и натянуть ее карандашом. Если теперь вести карандаш так, что нить будет все время натянута, то сумма расстояний от конца карандаша до гвоздиков будет все время постоянной, и мы получим эллипс. Аналогично можно построить гиперболу и параболу.

Такое построение эллипса практически не слишком удобно. Лучший результат дает так называемый *эллиптический циркуль*, изображенный на рисунке 14, а. Он состоит из крестовины, в которой под прямым углом сделаны две прорези. В эти прорези вложены ползуны  $A$  и  $B$ , к которым шарнирами прикреплена линейка  $AB$ . По линейке ходит муфта  $M$  с зажимным винтом и отверстием для карандаша. Докажем, что если муфта  $M$  закреплена, то при движении линейки острие вставленного в муфту карандаша описывает эллипс. В самом деле, пусть  $AM = a$ ,  $MB = b$  и точка  $M$  имеет координаты  $x$  и  $y$  (рис. 14, б). Тогда из подобия треугольников  $AMK$  и  $MBL$  получаем, что  $\frac{KM}{AM} = \frac{LB}{MB}$ , т. е.  $\frac{|x|}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}$ , а отсюда сразу вытекает, что  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Несложно доказать, что это уравнение эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ .



Очевидно, что если, наоборот, заставить точку *М* двигаться по соответствующему эллипсу, а точку *А* — по прямой, то и точка *В* будет двигаться по прямой линии. На этом основано устройство механизма, преобразующего горизонтальное прямолинейное движение в вертикальное. Поскольку трудно заставить точку *М* двигаться в точности по эллипсу, этот механизм дает лишь приближенно прямолинейное движение точки *В*.

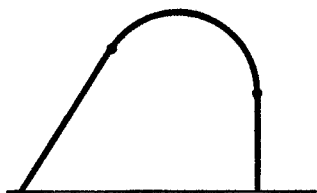


Рис. 15

**Пушки и ученые.** Траекториями метательных снарядов интересовался знаменитый философ древности Аристотель (384—322 годы до н. э.). Он считал, что они состоят из трех частей — наклонной прямолинейной, вертикальной и сопрягающей их круговой (рис. 15). Утверждения Аристотеля были далеки от истины, поскольку строились на неточных наблюдениях и умозрительной философии, а не на эксперименте. Надо думать, что воины его царственного ученика Александра Македонского не применяли теорию Аристотеля, когда метали камни из катапульт, осаждая персидские и вавилонские города.

В XIII веке н. э. монах Бертольд Шварц открыл для европейцев порох (в Китае он был известен за много столетий до того). Это повлекло за собой революцию в военном деле — ни одна тогдашняя крепость не могла долго выдержать артиллерийский огонь. Сначала применяли лишь настильный огонь (см. ниже, с. 34), а это не давало возможности, например, располагать орудия за холмом, укрывая артиллеристов от выстрелов противника. Лишь позже догадались применять навесный огонь, позволявший стрелять из-за укрытия. Чтобы обеспечить прицельность навесного огня, нужно было изучить движение тела, брошенного под углом к горизонту.

Первым из математиков решал эту задачу в XVI веке гениальный самоучка Николо Тарталья (1500—1557), работавший в венецианском арсенале. Прозвище «Тарталья» означало «заика». Он получил это прозвище потому, что в младенчестве был ранен в лицо при взятии его родного города французами и после этого очень невнятно говорил. Тарталья занимался многими вопросами математики и механики; он открыл формулу для решения кубического уравнения, изучал некоторые комбинаторные

задачи и т. д. Однако его не признавали университетские ученые того времени, и открытия Тарталья носят имена других математиков (формула Кардано, треугольник Паскаля).

Размышляя над движением артиллерийских снарядов, Тарталья пришел к выводу, что снаряд пролетит наибольшее расстояние, если наклонить орудие к горизонту под углом  $45^\circ$ . Сначала он хранил тайну этого открытия, но когда турецкий султан Сулейман Великий напал на Адриатику и Венецию, Тарталья написал герцогу Урбинскому: «Так как я вижу, что волк подкрадывается к нашему стаду и что все наши пастухи готовятся к защите, то мне предоставляется предосудительным скрывать далее эти вещи, и потому я решил ознакомить с ними каждого истинного гражданина, чтобы каждый был лучше вооружен как для нападения, так и для защиты».

Однако и Тарталья не знал еще теоретической основы законов, управляющих движением снарядов. Лишь Галилей установил законы падения тел. Из его работ следовало, что движение тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту со скоростью  $v_0$ , можно разложить на два составляющих: равномерное движение со скоростью  $v_0$  по наклонной прямой и свободное падение. Поэтому координаты этого тела в момент времени  $t$  выражаются так:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

А отсюда уже легко получить, что

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

Это — уравнение параболы, обращенной вершиной вверх.

При  $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$  ордината  $y$  вторично обращается в нуль.

Поэтому точка падения снаряда отстоит от точки его вылета на расстояние  $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ . Разумеется, надо иметь

в виду, что, решая эту задачу, мы сделали целый ряд упрощающих предположений — пренебрегли сопротивлением воздуха, не учли наклона почвы и т. д. Поэтому полученный ответ можно рассматривать лишь как первое приближение. Но и он позволяет сделать ряд важных

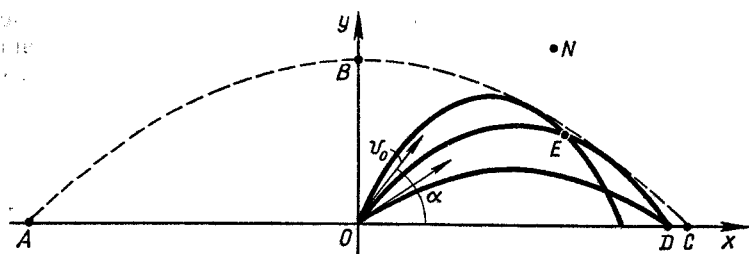


Рис. 16

выводов, в частности подтвердить догадку Тартальи. В самом деле, функция  $y = \sin 2\alpha$  принимает наибольшее значение, равное 1, если  $2\alpha = 90^\circ$ , т. е.  $\alpha = 45^\circ$ . А это и значит, что наибольшая дальность поражения, а именно  $\frac{v_0^2}{g}$ , получится, если наклонить орудие под углом  $45^\circ$  к горизонту. Кроме того, так как  $\sin 2\alpha = \sin 2(90^\circ - \alpha)$ , то при углах наклона  $\alpha$  и  $90^\circ - \alpha$  снаряд попадает в одну и ту же точку. Артиллеристы различают получающиеся при этом траектории снаряда, называя одну из них *настильной*, а другую *навесной*.

Если при заданном значении начальной скорости  $v_0$  менять угол  $\alpha$ , то получится бесконечное множество парабол (рис. 16). Все параболы, для которых  $45^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ , касаются одной и той же линии, имеющей уравнение

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{v_0^2} \right).$$

Ее называют *параболой безопасности* — если точка  $N$  находится вне ограниченной ею области, то при начальной скорости  $v_0$  снаряд не попадет в  $N$  ни при каком угле наклона.

Современник Галилея астроном Иоганн Кеплер (1571—1630) применил другое коническое сечение для описания движения планет. Обработывая наблюдения, сделанные в течение многих лет его учителем Тихо Браге (1546—1601), он доказал, что планеты движутся по эллипсам, причем Солнце находится в фокусе всех этих эллипсов. Этим он внес существенное дополнение в теорию Коперника (1473—1543), считавшего, что планеты равномерно движутся вокруг Солнца по окружностям.

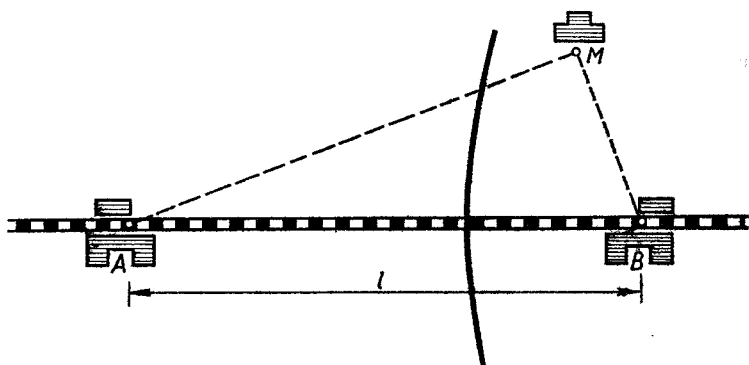


Рис. 17

**Области влияния.** На рисунке 17 изображен хлебный элеватор, находящийся около железнодорожной станции  $A$ . Хлеб на этот элеватор может доставляться или прямо на грузовиках, или сначала на грузовиках до станции  $B$ , а потом по железной дороге до станции  $A$ . Требуется выяснить, для каких сел выгоднее первый способ, для каких — второй. Обозначим через  $l$  расстояние между  $A$  и  $B$ , через  $d_1$  — стоимость перевозки одной тонны по железной дороге, через  $d_2$  — грузовым автотранспортом, а через  $d$  — стоимость добавочной перегрузки одной тонны зерна при втором варианте перевозок. Тогда стоимость доставки одной тонны зерна из  $M$  в  $A$  при первом варианте равна  $d_2 \cdot MA$ , а при втором она равна  $d_2 \cdot MB + ld_1 + d$ .

Если  $d_2 (MA - MB) < ld_1 + d$ , то для  $M$  выгоднее первый вариант, а если  $d_2 (MA - MB) > ld_1 + d$ , то второй. Эти неравенства можно записать в виде  $MA - MB \leq 2a$ , где  $2a = \frac{ld_1 + d}{d_2}$ . Найденные области разграничиваются кривой, на которой  $MA - MB = 2a$ , т. е. ветвью гиперболы с фокусами  $A$  и  $B$ .

**Оптические свойства конических сечений.** Известный философ-идеалист Иммануил Кант полагал, что древние геометры изучали свойства кривых линий, не интересуясь, зачем нужны эти знания, какую они приносят пользу. Отчасти он был прав — многие греческие геометры были «чистыми математиками» и, доказывая свои

теоремы, не интересовались приложениями изучаемых ими линий. Но самый замечательный из древних математиков, а именно Архимед (287—212 годы до н. э.), занимался не только «чистой» математикой, но и ее приложениями к механике и даже к военному делу (он был душой и мозгом обороны Сиракуз от римских захватчиков; после взятия города его убил один из римских солдат).

По дошедшей до нас легенде Архимед построил вогнутые зеркала и с их помощью сжег римские корабли. Большинство ученых отвергает эту легенду, поскольку такие зеркала должны были бы иметь слишком большие размеры, а это было невозможно при тогдашнем уровне техники.

Некоторые считают, что зеркала могли состоять из отдельных пластинок, а поставленные опыты показали, что с помощью составного зеркала можно поджечь на расстоянии нескольких десятков метров просмоленные дощечки.

Но если даже история о сожжении кораблей и легендарна, то, во всяком случае, Архимед мог воскликнуть, перефразируя свое же изречение: «Дайте мне большое параболическое зеркало, и я сожгу римский флот». Древние авторы писали, что в его сочинении «Катоптрика» (не дошедшем до нас) содержались исследования о свойствах зеркал, построении отражений в различных зеркалах и, что особенно важно, о зажигательных зеркалах. Свойства таких зеркал были связаны с коническими сечениями, так что геометрические исследования Архимеда нашли у него непосредственное практическое применение.

Прежде чем рассказывать о результатах, полученных Архимедом, решим сначала задачу.

*По одну сторону от прямой  $AB$  расположены точки  $F_1$  и  $F_2$ . Найти такую точку на прямой, чтобы сумма ее расстояний до точек  $F_1$  и  $F_2$  была наименьшей.*

Чтобы решить эту задачу, достаточно отразить относительно прямой  $AB$  точку  $F_2$  (рис. 18). Тогда для любой точки  $N$  на этой прямой имеем  $NF_2 = NF'$ , и потому  $NF_1 + NF_2 = NF_1 + NF'$ . Но  $NF_1 + NF'$  имеет наименьшее значение, если в качестве точки  $N$  взять точку  $N_1$  пересечения прямых  $AB$  и  $F_1F'$ . В этом случае углы  $F_1N_1A$  и  $F_2N_1B$  равны. Итак, требуемым свойством обладает точка  $N_1$ , для которой, как говорят, угол падения равен

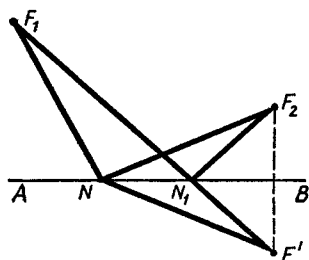


Рис. 18

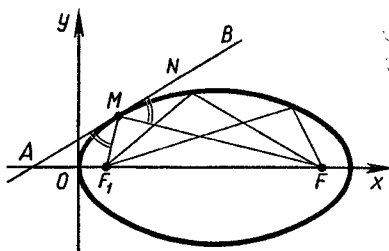


Рис. 19

углу отражения. Именно этим свойством обладает луч света, отраженный от зеркала (указанное свойство отраженного луча света было известно Архимеду).

А теперь возьмем эллиптическое зеркало и поместим источник света в один из фокусов ( $F$ ) эллипса (рис. 19). Архимед доказал, что отразившиеся от зеркала лучи соберутся в другом фокусе ( $F_1$ ). Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим наряду с заданным эллипсом все эллипсы с теми же фокусами  $F_1$  и  $F$ . Они отличаются друг от друга суммой расстояний их точек от фокусов — по мере увеличения этой суммы эллипсы расширяются.

Поэтому если взять эллипс и провести в одной из его точек  $M$  касательную  $AB$ , то для всех остальных точек касательной сумма  $|NF_1| + |NF|$  будет больше, чем такая же сумма для точки  $M$  (все эти точки лежат вне эллипса). Значит, точка  $M$  обладает описанным выше минимальным свойством, и потому углы  $F_1MA$  и  $FMB$  равны. А это означает, что луч, вышедший из точки  $F$  и отразившийся от эллипса в точке  $M$  (т. е. от касательной к эллипсу в этой точке), пройдет через точку  $F_1$ .

Предположим теперь, что точка  $F$  начнет удаляться по прямой  $F_1F$ , а точка  $F_1$  будет неподвижной, равно как и вершина эллипса (рис. 20). Эллипс будет при этом изменяться, но лучи, вышедшие из точки  $F$ , будут по-прежнему собираться в точке  $F_1$ . Когда точка  $F$  уйдет в бесконечность, эллипс превратится в параболу (парабола является, таким образом, предельной формой для эллипса). При этом лучи, шедшие из точки  $F$ , превратятся в лучи, идущие из бесконечности, они будут параллельны оси симметрии параболы. Мы доказали, таким образом, следующее утверждение:

Любая прямая, параллельная оси симметрии параболы, после отражения от параболы проходит через ее фокус.

Теперь уже ясно, как изготовить зеркало, собирающее солнечные лучи в одной точке. Для этого нужно отшлифовать его по параболоиду вращения — поверхности, получаемой при вращении параболы вокруг ее

оси. Если направить такое параболическое зеркало на Солнце, то все отраженные лучи пройдут через фокус параболы  $F_1$  и температура в нем окажется настолько большой, что с помощью солнечных лучей можно будет вскипятить воду, расплавить свинец и т. д. Отсюда происходит, между прочим, и само название «фокус», означающее по-латыни «очаг».

Это свойство параболических зеркал используют при конструировании солнечных печей, телескопов и т. д. Параболические антенны можно увидеть около любого аэродрома — они используются для того, чтобы собрать в одну точку сигналы радиолокатора, отраженные от самолета. В прожекторах, наоборот, свет, исходящий из фокуса параболического зеркала, после отражения образует параллельный пучок и не рассеивается. По той же причине форму параболоида вращения имеют и автомобильные фары. Используются параболические зеркала и в лазерах.

Как уверяет в своем романе Алексей Николаевич Толстой, инженер Гарин получал конденсированные пучки световой энергии, применяя не параболические, а гиперболические зеркала. Надо думать, что получивший высшее техническое образование писатель знал о своей «ошибке» и допустил ее умышленно, считая, что «Гиперболоид инженера Гарина» звучит куда лучше, чем «Параболоид инженера Гарина», а для большинства читателей не так уж важно, какое зеркало на самом деле дает направленный пучок лучей.

Доказанное выше свойство параболы можно сформулировать и так:

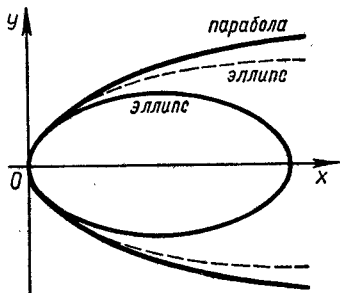


Рис. 20.

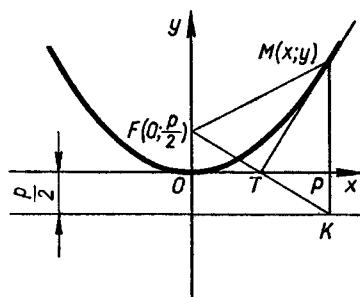


Рис. 21

Касательная в любой точке параболы делит пополам угол между прямой, соединяющей точку касания с фокусом, и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису.

Пользуясь этим замечанием, легко доказать, что для параболы  $x^2 = 2py$  угловой коэффициент касательной пропорционален абсциссе точки касания. В самом деле, проведем директрису этой параболы и отметим ее фокус (рис. 21). Фокус параболы имеет координаты  $F(0; \frac{p}{2})$ , а директриса удалена от оси абсцисс на  $\frac{p}{2}$ . Так как  $FM = MK$ , а прямая  $MT$  делит пополам угол  $FMK$ , то  $FT = TK$ , и потому точка  $T$  лежит на оси абсцисс, причем  $OT = TP = \frac{x}{2}$ . А теперь уже ясно, что

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{TP} = \frac{y}{\frac{x}{2}} = \frac{x^2}{px} = \frac{x}{p}.$$

Можно доказать, что любая кривая, обладающая этим свойством, является параболой.

**Ртутное зеркало.** Изготовить громадное параболическое зеркало для телескопа очень сложно — надо весьма точно отшлифовать стекло. Американский физик Роберт Вуд придумал способ сделать такое зеркало из ртути. Для этого он установил на дне колодца сосуд с ртутью, а в крыше над колодцем пробил отверстие. Электромотор медленно вращал сосуд, а наблюдатель над колодцем наблюдал в окуляр изображения звезд и планет, проходивших через зенит.

Падкие на сенсации американские и европейские журналы набросились на новое изобретение и даже предлагали передавать с помощью таких телескопов сигналы на Марс. Однако вскоре выяснилось, что идея Вуда малоперспективна, так как с помощью его телескопа нельзя было наблюдать звезды, не находившиеся в зените (отдельные технические решения, примененные Вудом, оказались все же очень полезны, например способ подвески



сосуда, исключавший дрожание ртути при работе мотора). Все же можно согласиться с оценкой всей шумихи, даиной одним из американских физиков. После осмотра ртутного телескопа он написал в книге гостей стихи:

«Динг, донг, звон,  
В колодце он.  
Что же Вуд взял в путь?  
Лоханку и в ней ртуть.  
Что же вышло из сего?  
Почти что ничего!»

Чтобы понять идею Вуда, выясним, какую форму принимает поверхность жидкости, совершающей равномерное вращение. Для этого проведем произвольную плоскость через ось вращения и обозначим через  $LOL'$  кривую, получившуюся в сечении поверхности жидкости. Выберем систему координат, как показано на рисунке 22, и возьмем произвольную точку  $M(x, y)$  на кривой  $LOL'$ . При вращении с угловой скоростью  $\omega$  эта точка описывает окружность радиуса  $PM = x$ , причем плоскость окружности перпендикулярна плоскости чертежа. Линейная скорость этого вращения равна  $\omega x$ , причем вектор скорости перпендикулярен плоскости чертежа. На точку  $M$  действует сила тяжести  $\vec{F}_T = m\vec{g}$ , направленная вертикально, и сила давления жидкости  $\vec{F}_d$ , направленная по нормали к поверхности жидкости. Под действием этих сил точка должна описывать окружность в горизонтальной плоскости. Это возможно только в том случае, если поверхность жидкости искривится. По второму закону Ньютона равнодействующая  $\vec{R}$  силы тяжести  $\vec{F}_T$  и силы давления  $\vec{F}_d$  равна произведению массы точки на центростремительное ускорение, т. е.  $\vec{R} = m\omega^2 x$ . Треугольник  $AMN$  — прямоугольный. следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{MA}, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}, \text{ где } \alpha \text{ — угол наклона}$$

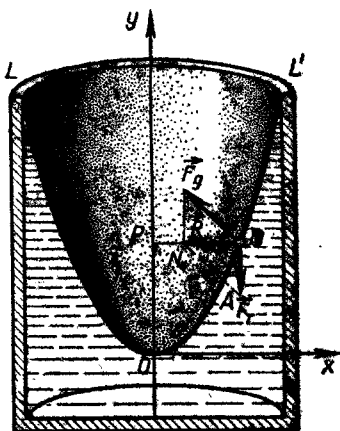


Рис. 22

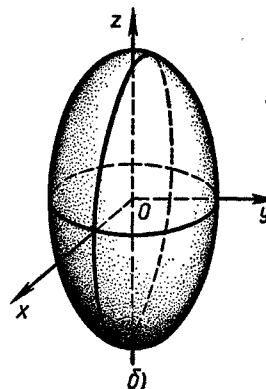
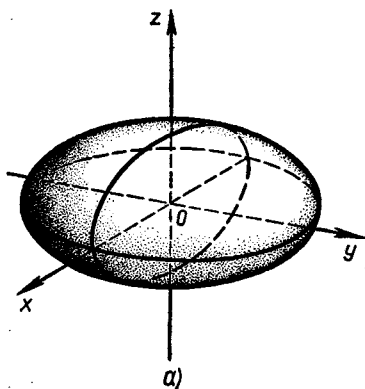


Рис. 23

касательной к оси абсцисс. Значит, угловой коэффициент касательной к искомой кривой пропорционален абсциссе точки касания.

Мы уже знаем, что это свойство характеризует параболу. Поэтому линия  $LOL'$  — парабола, а поверхность жидкости — параболоид вращения. Фокусное расстояние этого параболоида зависит от угловой скорости и равно  $\frac{g}{\omega^2}$ . Иными словами, чем быстрее будет вращаться жид-

кость, тем ниже будет точка  $O$  и тем меньше фокусное расстояние. На этом основан один из приборов, применяемых для измерения скорости вращения валов. Вращение сосуда с расплавленным металлом используется в центробежном литье для отливки полых тел и труб.

**Форма Земли и радиобашня.** Рассмотрим теперь поверхности, получаемые при вращении других конических сечений вокруг их осей симметрии. При вращении эллипса вокруг меньшей оси симметрии получается поверхность, похожая на апельсин, а при вращении вокруг большей оси симметрии — на дыню (рис. 23). Эти поверхности называют соответственно *сплюснутым* и *вытянутым эллипсоидами вращения*. Солнце и другие звезды под действием центробежной силы принимают форму сплюснутого эллипсоида вращения. Ту же форму имеет и поверхность Земли. В начале XVII века шли долгие споры между последователями Исаака Ньютона, которые в соответствии с его теорией тяготения, считали Землю

сплюснутой, и астрономами Жаном Кассини (1625—1712) и его сыном Жаком (1677—1756), которые, основываясь на неточных измерениях, считали ее вытянутым эллипсоидом. Решить, кто из них прав, можно было, лишь измерив длину дуги меридиана около экватора и в полярных областях. Экспедиция, возглавляемая французскими учеными Пьером Луи Мопертюи (1698—1759) и Алексисом Клеро (1713—1765), произвела такие измерения в Лапландии, а другая экспедиция сделала аналогичные измерения на американском континенте, где теперь находится республика Эквадор. Эти экспедиции показали правоту Ньютона. Мопертюи настолько гордился своим достижением, что позволил опубликовать гравюру, на которой было показано, как он одной рукой сдавливает земной шар. Властитель дум этой эпохи Вольтер первоначально восхвалял открытия Мопертюи, называя его маркизом полярного круга, дорогим плющильщиком мира и Кассини, и даже сэром Исааком Мопертюи. Но вскоре отношения Вольтера и Мопертюи испортились, и Вольтер язвительно написал:

«В местах, полных скуки, Вы подтвердили то,  
Что Ньютон познал, не покидая своего жилища».

Трудно, однако, согласиться с Вольтером. Ведь ни одна теория не может считаться признанной, пока ее не подтвердит опыт, так же, как никакой эксперимент не может считаться завершенным, пока не создана объясняющая его теория. Взятые изолированно, теория была бы пуста, а опыт близорук; они были бы бесполезны и неинтересны.

У гиперболы тоже есть две оси симметрии, одна из которых пересекает гиперболу, а вторая с ней не пересекается. Вращая гиперболу вокруг каждой из этих осей, получают два *гиперболоида вращения*. Первый из них состоит из двух полостей, и его называют *двуполостным* (рис. 24), а второй состоит из одного куска, и его называют *однopolостным*. Однополостный гиперболоид вращения обладает замечательным свойством — через каждую точку этого гиперболоида проходят две прямые линии, целиком лежащие на нем (рис. 25). Поэтому однополостный гиперболоид как бы соткан из прямых линий. Его можно получить, взяв в пространстве две скрещенные прямые и вращая одну из них вокруг второй.

Это свойство однополостного гиперболоида использовал русский инженер В. Г. Шухов при строительстве

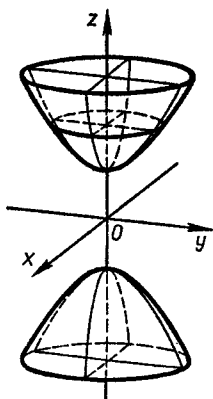


Рис. 24

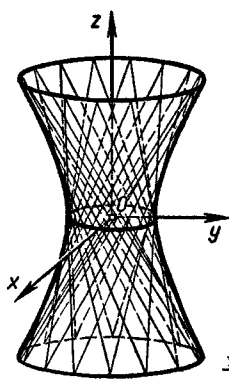


Рис. 25

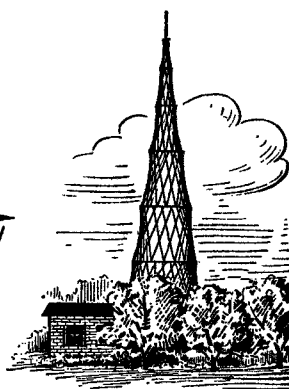


Рис. 26

радиостанции в Москве (башни Шухова). Она состоит из нескольких поставленных друг на друга частей однополостных гиперboloидов, причем каждая часть сделана из двух семейств прямолинейных балок, соединенных в точках пересечения (рис. 26). Так же устроена и Эйфелева башня в Париже.

Эллипсоиды, гиперboloиды и параболоиды изучаются не только в трехмерном пространстве, но и в пространствах многих (и даже бесконечно многих) измерений. Гиперboloиды в четырехмерном пространстве оказались теснейшим образом связанными со специальной теорией относительности. Тем самым установлена неожиданнейшая связь между исследованиями древнегреческих геометров и самыми замечательными завоеваниями теоретической физики XX века.

**Бесконечность.** Наряду с понятиями переменной и функции, решающую роль в построении дифференциального и интегрального исчисления сыграла идея бесконечности. Ее зарождение теряется в глубине веков.

Данные лингвистики показывают, что сначала люди умели считать лишь до двух. Потом запас чисел расширился до шести: даже в XIX веке были обнаружены племена, считавшие так: «один, два, два-один, два-два, два-два-один, два-два-два», а обо всем, что содержало более шести элементов, они говорили «много». И сейчас в пословицах и поговорках число «семь» заменяет слово «много» («Семеро одного не ждут», «Семь раз отмерь, один раз отрежь», «Один с сошкой, семеро с ложкой» и т. д.). Потом наибольшим стало число 40, затем эта граница отодвинулась до 100, далее — до 1000. Но даже этих чисел не хватало для того, чтобы пересчитать звезды на небе, песчинки на берегу моря, листья в лесу. Глядя ввысь, люди думали о неисчислимом множестве звезд, о бездонном небе. Эти чувства выражены в стихах М. В. Ломоносова:

«Открылась бездна, звезд полна;  
Звездам числа нет, бездне — дна».

Изобретение позиционных систем счисления дало возможность называть очень большие числа. Например, в одной из вавилонских таблиц приводятся все делители числа  $60^8 + 10 \cdot 60^7 = 195\,955\,200\,000\,000$ . В индийских книгах исчисляется количество «атомов», содержащееся в 3200 длинах лука (оно равно 108 470 495 616 000), а в одной из них рассказывается о сражении, в котором приняло участие  $10^{23}$  обезьян. Авторы этих сказаний не

смущало, что такого количества обезьян не вместила бы вся Солнечная система, они радовались, что могут оперировать громадными числами.

Хотя в Древней Греции и не было позиционной системы счисления (здесь, по-видимому, тоже сказались нелюбовь греческих математиков к прикладным вопросам), Архимед разработал систему обозначений, позволявшую называть числа от 1 до  $10^{8 \cdot 10^{18}}$ . Если написать  $10^{8 \cdot 10^{18}}$  на бумажной ленте, записывая 400 цифр на полоске длиной 1 м, то длина ленты будет больше, чем расстояние от Земли до Солнца! Архимед доказал, что с помощью гораздо меньших чисел можно выразить число песчинок в шаре, радиус которого равен расстоянию от Земли до сферы неподвижных звезд (в то время думали, что все звезды прикреплены к сфере, в центре которой находится Земля).

Работая с громадными числами, люди пришли к мысли, что нет самого большого числа, что за каждым числом идет следующее, а ряд натуральных чисел бесконечен. Сейчас эта идея кажется простой даже школьникам IV класса, но когда-то она была важным завоеванием теоретического мышления. Она позволила поставить вопрос о безграничности пространства. Что находится за сферой неподвижных звезд? Есть ли граница Вселенной? Размышляя над этим, древнегреческие философы пришли к представлению о мире, не имеющем границ. «Где бы ни стал воин, он сможет протянуть свое копьё еще дальше», учил живший в VI веке до н. э. философ Анаксимандр. Теперь мы знаем, что это рассуждение доказывает лишь неограниченность, но не бесконечность пространства.

Еще раньше люди пришли к идее вечности, бесконечности мира во времени. Она выражена в следующей восточной притче:

«Вот алмазная гора высотой в тысячу локтей. Раз в столетие прилетает птичка и точит свой клюв о гору. Когда она сточит всю гору, пройдет первое мгновение вечности».

Так возникла модель мира, бесконечного во всех направлениях и вечного во времени. Наиболее смелые мыслители (например, Гераклит) учили даже, что мир не имел и начала и не был создан кем-либо из богов.

**Атомистика и бесконечно малые.** Освоившись с идеей бесконечности, мыслители стали думать и о бесконеч-

но малых величинах, получающихся при безграничном делении предметов на части. Повседневный опыт учил, что хлеб, яблоко, кувшин вина можно разделить между участниками трапезы. В случае необходимости каждую из получившихся частей можно было дальше делить на еще более мелкие части. Но есть ли граница этому делению? Ответить на этот вопрос, опираясь только на опыт, было невозможно. Здесь речь шла уже о настолько мелких частях, что их нельзя было разглядеть самому зоркому из людей. Поэтому вопрос о пределе делимости вещей перешел из сферы опыта в сферу умозрительных рассуждений.

Возникли две основные школы, одна из которых учила, что безграничное деление возможно, а вторая пришла к выводу, что существуют наименьшие частицы вещества — *атомы*, которые дальше уже не делятся (атом и значит по-гречески «неделимый»). Но атомисты и их противники расходились лишь во взглядах на природу материи. В том, что пространство безгранично делимо, не сомневались даже самые завзятые сторонники атомизма.

В середине V века до н. э. выяснилось, что предположение о безграничной делимости пространства при осторожном обращении ведет к парадоксальным следствиям. Философ Зенон Элейский, пользуясь этим предположением, доказывал, что ...в мире не существует движения. Ведь, говорил он, летящая стрела, прежде чем попасть в цель, должна пролететь половину пути, а до этого одну четверть пути, еще ранее — одну восьмую пути и т. д. А так как пространство безгранично делимо, то процесс деления пополам никогда не кончится, стрела никогда не полетит и останется неподвижной. Этот вывод опровергался простейшим экспериментом, описанным в стихотворении А. С. Пушкина:

«Движенья нет, сказал мудрец брадатый,  
Другой смолчал и стал пред ним ходить.  
Сильнее бы не мог он возразить,  
Хвалили все ответ замысловатый».

Но тем не менее аргументы Зенона показали, что представления о бесконечности, господствовавшие в тог-  
дашней математике, были весьма наивны. В частности, в его рассуждениях впервые было выяснено, что отрезок

можно разбить на бесконечное множество отрезков, каждый из которых имеет конечную длину. До него отрезок всегда разбивали лишь на равные части, а тогда при увеличении числа частей их размеры безгранично уменьшались. Философское значение апорий<sup>1</sup> Зенона состояло в том, что они вскрыли действительную противоречивость движения, пространства и времени. И сейчас в теоретической физике возникают затруднения, чем-то напоминающие противоречия Зенона. Только у Зенона бесконечным было число частей, которые должна пролететь стрела, а у современных физиков бесконечна энергия взаимодействия электрона с порождаемым им электромагнитным полем. И может быть, причины затруднений Зенона и современных физиков чем-то родственны — в обоих случаях речь идет о возможности применять к микромиру понятия, возникшие при изучении больших объектов, о строении пространства в малом.

Впечатление, произведенное апориями Зенона, можно сравнить лишь с переворотом в мышлении физиков, вызванным появлением теории относительности. После Зенона нельзя уже было обращаться с бесконечностью с той восхитительной небрежностью, которая была характерна для его предшественников. Рассуждения, в которые входило слово «бесконечность», оказались обесцененными.

Одну из попыток спасти положение предпринял крупнейший атомист древности Демокрит. Он создал теорию, в которой пытался доказать, что не только физические тела состоят из атомов, но и пространство делимо лишь до определенных пределов, после чего идут уже части пространства, не имеющие ни формы, ни размеров. Если бы Демокриту удалась его попытка, современная математика могла бы принять совсем иной вид — она была бы не математикой непрерывного, а математикой дискретного. Но теория Демокрита не смогла объяснить несоизмеримость стороны квадрата с его диагональю. Ведь если бы отрезки состояли из конечного числа неделимых частей, то достаточно было бы подсчитать число этих неделимых в диагонали квадрата и его стороне, чтобы выразить отношение их длин в виде дроби. Кроме того, Демокриту не удалось ответить на вопрос, равны

---

<sup>1</sup> *Апории* — непреодолимые противоречия при разрешении проблемы.



ли между собой сечения пирамиды. Если они равны, то пирамида не может сужаться к вершине, а если неравны, то пирамида должна иметь ступенчатую форму (ведь, по Демокриту, при последовательном делении высоты пирамиды пополам в конце концов получаются неделимые далее слои). Не исключено, что сам Демокрит сомневался в реальном существовании пирамид, шаров и других геометрических тел, а считал их абстракцией, т. е. представлял их в виде ступенчатых тел со столь малыми ступеньками, что они неразличимы для человеческих чувств. К сожалению, труды Демокрита не дошли до нашего времени, и мы знаем о них лишь по цитатам, сделанным другими философами.

**Актуальная и потенциальная бесконечности.** Когда стало ясно, что идеи Демокрита не удастся логически обосновать, философы стали искать иные пути, чтобы опровергнуть рассуждения Зенона. Аристотель ввел различие между актуальной и потенциальной бесконечностями. Отвечая на вопрос «Существует ли бесконечное?», он говорил:

«Бесконечность не существует актуально, как бесконечное тело или величина, воспринимаемые чувствами... Бесконечное существует потенциально, бесконечное есть движение...»

Таким образом, Аристотель допускал бесконечный процесс деления пополам, но не допускал возможности деления отрезка на бесконечное множество частей. Ученики Аристотеля считали ненаучным представление, что величины состоят из бесконечного множества бесконечно малых частей. Они говорили: «Наука истинна лишь постольку, поскольку она не основана на предположении, что непрерывное состоит из неделимого».

Пришлось и математикам изгнать неделимые из своей науки. Вместе с неделимыми из математики была изгнана и бесконечность. На любые рассуждения, в которых использовались понятие бесконечности, был наложен запрет. Да и движением, и вообще физическими методами рассуждений старались пользоваться поменьше — после Зенона понятие движения считалось хотя и очевидным, но логически ненадежным.

Демокрит, используя свои атомистические представления, вычислил объем пирамиды. После осуждения его идей надо было искать новые пути вывода этой формулы, разрабатывать процедуру вычисления геометрических ве-

личин, в которой не говорилось бы ни о бесконечно малых, ни о неделимых. Такую процедуру создал в IV веке до н. э. греческий математик Евдокс. Он разработал *метод исчерпывания* (иначе, *истощения*), позволявший переходить от утверждений о площадях и объемах многоугольников и призм к соответствующим утверждениям о площадях и объемах более сложных фигур.

Например, чтобы доказать, что площади двух кругов относятся как квадраты длин их диаметров, Евдокс сначала доказывал соответствующее утверждение для вписанных в эти круги правильных многоугольников. Современный математик после этого совершил бы предельный переход, но для греков этот путь был закрыт, и потому Евдокс шел обходным путем. Он предполагал противное, например, что отношение площадей кругов больше отношения квадратов диаметров. После этого он вписывал в эти круги правильные многоугольники с настолько большим (но все же конечным!) числом сторон так, чтобы их площади достаточно мало отличались от площадей кругов.

А тогда оказывалось, что, с одной стороны, отношение площадей этих многоугольников равно отношению квадратов диаметров (это-то было известно до доказательства), а, с другой стороны, оно больше этого отношения (поскольку этим свойством обладает отношение площадей кругов, а многоугольники выбраны так, что их площади достаточно мало отличаются от площадей кругов). Разумеется, у Евдокса это доказательство излагалось гораздо строже и подробнее, сопровождалось леммами и следствиями и... становилось таким громоздким, что даже человеку, знающему суть дела, было нелегко в нем разобраться. Поскольку предположение, что отношение площадей кругов больше отношения квадратов диаметров, приводило к противоречию, а предположение, что оно меньше отношения квадратов диаметров, опровергалось такими же рассуждениями, оставалось одно — считать доказанным, что эти два отношения равны. Как говаривал Шерлок Холмс, «то, что остается после исключения всего невозможного, истинно».

Методом Евдокса с успехом воспользовался Архимед при выводе формул объема пирамиды, шара, площади параболического сегмента (фигуры, ограниченной дугой параболы и стягивающей ее хордой), сектора спирали

и т. д. Однако ученым последующих поколений было непонятно, как Архимед открыл эти формулы, так как метод исчерпывания позволял отбрасывать ложное, но не отыскивать истинное.

Разгадка пришла лишь через два тысячелетия, уже после того, как было построено интегральное исчисление, позволившее без труда решать еще более сложные задачи. В 1906 году приват-доцент Петербургского университета Попадопуло-Керамевс нашел в библиотеке одного из иерусалимских монастырей написанный на пергаменте богословский трактат. Так как в средние века пергамент был очень дорог, то монахи обычно брали древние книги, стирали или смывали с них языческий текст и писали какое-нибудь житие вымышленного ими великомученика или рассуждение о том, почему троица единосущна. Однако, если монах был не слишком прилежен, то смытую рукопись, хоть и с трудом, можно было прочесть. Когда Попадопуло-Керамевс опубликовал часть смытого текста, датский историк математики Гейберг сразу понял, что монах погубил рукопись с трудами Архимеда. Ценой больших усилий текст удалось восстановить. Оказалось, что большую часть работ Архимеда ученые уже знали. Но одна была неведомой — письмо Эратосфену, в котором Архимед раскрывал свои методы и учил не только доказывать, но и открывать новые результаты.

И тут выяснилось, что Архимед получал свои результаты «незаконными» методами Демокрита, пользуясь неделимыми частями фигур. Он разлагал цилиндры, конусы и шары на «неделимые» тонкие кружочки, доказывал нужное ему утверждение для одного такого кружочка, отмечал, что этот вывод верен для всех кружочков, и в заключение произносил совершенно запрещенную правоверными математиками того времени фразу: «Так как все тело сложено из таких кружочков и целиком заполнено ими, то утверждение верно для всего тела». К этому надо добавить, что Архимед не боялся использовать и соображения о равновесии рычагов, переносить кружочки из одного места в другое и т. д. Впрочем, читатель знает, что работы Архимеда относились не только к чистой математике, но и к механике, оптике, гидростатике, что именно он установил законы плавающих тел, а потому его любовь к основанным на механике рассуждениям совсем неудивительна.

**Возрождение атомизма.** В течение почти двух тысячелетий, прошедших после споров Зенона и Демокрита, Платона и Аристотеля, об атомистическом учении вспоминали мало. Лишь римский поэт-философ Лукреций Кар в поэме «О природе вещей» снова проповедовал это, казалось бы забытое, учение. В Западной же Европе ученые-схоласты повторяли вслед за Аристотелем и его учениками, что вещество безгранично делимо, а уж о пространстве и времени и говорить нечего — их безграничная делимость казалась очевидной. Укреплению этой точки зрения способствовало то, что в известных тогдашним ученым математических сочинениях Евклида и Архимеда господствовал метод исчерпывания, основанный на безграничной делимости геометрических фигур.

Одним из первых вновь поднял голос в защиту атомизма Джордано Бруно, который писал: «Причиной и основанием всех ошибок как в физике, так и в математике является допущение непрерывности и бесконечного деления». Если схоласты учили, что Вселенная ограничена, а пространство безгранично делимо, то Бруно принимал неограниченность пространства и предел делимости. А так как Бруно не только опровергал мнения Аристотеля, но и проповедовал противоречившее библейским сказаниям учение Коперника, то инквизиция не преминула расправиться с богохульником. В 1600 году Бруно был сожжен на площади Цветов в Риме. Впрочем, от римской инквизиции недалеко ушел парижский парламент. В 1624 году в Париже были арестованы ученые, выдвинувшие тезис об атомном строении материи, и издано постановление парламента, предписывавшее предавать смертной казни всех, кто выступит с полемикой против старых и общепризнанных авторов.

Но на большинство ученых эти грозные предписания уже не действовали. Авторитет схоластической науки безнадежно упал, так как схоласты не могли ответить на насущные вопросы практики. А эти вопросы множились с каждым днем, и никто из практиков не хотел ждать, пока полученные математиками результаты будут доказаны со всей строгостью — ответ требовался как можно скорее. Быстро же получать решения задач можно было, лишь применяя осужденные официальной наукой и церковью понятия о неделимых и бесконечно малых.

Первая работа, в которой эти понятия были исполь-

зованы для вычисления объемов тел, обязана своим появлением запросам практики, хотя и носившим несколько необычный характер. В 1613 году королевский математик и астролог австрийского двора Иоганн Кеплер праздновал свадьбу. Готовясь к ней, он купил несколько бочек виноградного вина. При покупке Кеплер был поражен, увидев, что продавец определял вместимость бочки, измеряя лишь расстояние от наливного отверстия до самой дальней от него точки днища. Но такое измерение совсем не учитывало форму бочки! Кеплер сразу увидел, что перед ним интереснейшая математическая задача — какие измерения надо произвести, чтобы с достаточной точностью определить объем бочки.

Задача осложнялась тем, что форма бочек не подходила ни под один из случаев, изученных древними геометрами, — они не были ни шарами, ни параболическими сегментами, ни эллипсоидами. Решая эту задачу, Кеплер сначала нашел объемы тел, образуемых при вращении круговых сегментов вокруг хорды (в зависимости от того, какой из двух сегментов вращается вокруг хорды, он назвал эти тела яблоком и лимоном). Далее он нашел объем кольца, или, как теперь говорят, *тора*. Но бочка не была похожа ни на одно из этих тел, и Кеплеру пришлось перейти к телам, получаемым при вращении сегментов конических сечений — эллипса, параболы и гиперболы. Он дал этим телам весьма причудливые названия — айва, приземистая дыня, груша, оливка, слива и даже турецкая чалма.

Но еще причудливее с точки зрения правоверного геометра были методы, которыми он получал свои результаты. Чтобы найти, например, объем тора, он разрезал его на бесконечно тонкие слои плоскостями, проходящими через ось вращения. Эти слои были с внутренней стороны уже, чем с внешней, а потому Кеплер брал их толщину посередине. Умножив ее на площадь вращавшегося круга, он вычислил объем одного слоя. Теперь осталось сложить объемы всех слоев, чтобы получить объем тора. При этом Кеплер заменил сумму бесконечно малых хорд длиной окружности. В другом случае при вычислении объемов Кеплер разрезал сложную геометрическую фигуру на бесконечно тонкие слои, переложил их в ином порядке и получил *цилиндрическое копыто* — часть прямого кругового цилиндра, отсекаемую от него плоскостью, проходящей через диа-

метр основания. А уж с вычислением объема этого копыта он сумел справиться.

В тех случаях, когда и такие экстравагантные методы не позволяли найти объем тела, Кеплер прибегал к рассуждениям по аналогии, численным расчетам и т. д. Не удивительно, что математики, усвоившие лишь букву, а не дух методов Архимеда, обрушились на Кеплера. Но первый шаг был сделан — ученые увидели, что *инфинитезимальные методы* (от латинского «инфинитум» — бесконечность), т. е. использование таких понятий, как «бесконечно тонкий слой», «неделимая часть» и т. д., могут быть полезны.

Сам Кеплер использовал их в астрономических исследованиях. Как известно, во втором законе Кеплера речь идет о площади *эллиптического сектора*. Но формулы для вычисления таких площадей математика древних не давала, и Кеплеру пришлось разрабатывать новые пути. Так, вместо площади сектора Кеплер говорил о «сумме всех радиус-векторов». Он рассматривал каждый радиус-вектор как бесконечно тонкий круговой сектор и суммировал площади бесконечного множества таких секторов.

**Геометрия неделимых.** О сложении бесконечного числа бесконечно малых величин думал в эти годы и Галилей. Подсчитывая путь, пройденный при равноускоренном движении, он должен был суммировать бесконечно малые отрезки пути, пройденные телом за бесконечно малые промежутки времени, — за конечный промежуток времени скорость тела успевала измениться. С этой задачей Галилей справился, сообразив, что дело сводится к отысканию площади треугольника. Но он понимал, что при изучении более сложных движений без правил такого суммирования обойтись не удастся. В одной из работ, написанной в форме беседы, один из участников спора, выражающий мысли Галилея, говорит, что «мы находимся в области бесконечных и неделимых».

К сожалению, затравленный инквизицией Галилей не успел изложить свои идеи о бесконечно малых и неделимых. Это сделал его ученик Бонавентура Кавальери (1598—1647), опубликовавший в 1635 году книгу «Геометрия, изложенная новым способом при помощи непрерывного». В ней он построил упрощенную разновидность исчисления бесконечно малых, основанную на

представлении, что линии порождаются движением точек, поверхности — движением линий, тела — движением поверхностей. Основным методом получения результатов у Кавальери был принцип, называемый сейчас его именем. *Принцип Кавальери* заключается в том, что два тела одинаковой высоты имеют один и тот же объем, если плоские сечения этих тел на одинаковом уровне имеют одинаковые площади.

Хотя это утверждение и связывается с именем Кавальери, вряд ли можно сомневаться в том, что его знали еще древнегреческие атомисты. Скорее всего, именно с его помощью один из основателей атомистики — Демокрит вывел формулу для объема пирамиды. А может быть, еще более общим утверждением, в котором речь шла не о равенстве площадей сечений, а о постоянстве их отношений, воспользовались древнеегипетские писцы, которые задолго до Демокрита знали, как находить объем пирамиды. Ведь для пирамиды, вершина которой находится в центре куба, а основание совпадает с одной из его граней, задача решается совсем просто: куб состоит из шести таких пирамид и потому объем каждой

из них равен  $\frac{1}{6}$  объема куба. А переход к любой пирамиде и даже конусу легко сделать с помощью обобщенного принципа Кавальери. Но принцип Кавальери позволяет найти и объем шара. В самом деле, из рисунка 27 видно, что площадь сечения шара плоскостью, находящейся на расстоянии  $x$  от центра, равна  $\pi(R^2 - x^2)$ , где  $R$  — радиус шара. Но тому же значению  $\pi(R^2 - x^2)$  равна и площадь кольца. Поэтому, в силу принципа Кавальери, объем полушара равен объему цилиндра, уменьшенному на объем конуса, т. е.  $\pi R^2 R - \frac{1}{3} \pi R^2 R = \frac{2}{3} \pi R^3$ , объем шара

равен  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .

Аналогичный принцип Кавальери выдвинул и для сравнения площадей, только в качестве сечений брал не плоские фигуры, а отрезки. Покажем, как с помощью этого принципа найти площадь, лежащую под одной аркой циклоиды. Для этого возьмем половину искомой площади и, кроме циклоиды, начертим кривую, состоящую из проекций движущейся точки на вертикальные диаметры (рис. 28). Легко проверить, что эта линия (часть синусоиды) делит прямоугольник  $ABCD$  на две равные

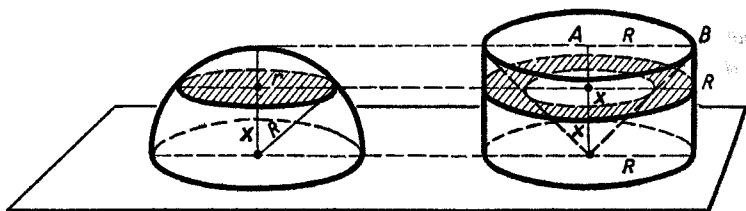


Рис. 27

части. Так как стороны прямоугольника имеют длины  $\pi r$  и  $2r$ , то площадь каждой из половин равна  $\pi r^2$ . Чтобы закончить вычисление, надо найти площадь заштрихованной фигуры. Но в каждый момент времени хорда  $MP$  этой фигуры равна полухорде  $EF$  круга, и потому, по принципу Кавальери, площадь заштрихованной фигуры равна площади полукруга, т. е.  $\frac{\pi r^2}{2}$ . Итак, площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды, равна  $3\pi r^2$ , т. е. вдвое больше площади катившегося круга.

Другие ученые применяли при отыскании площадей и объемов иные методы. Например, Пауль Гульден (1577—1643) использовал для этого свойства центра тяжести. Он утверждал, что *объем тела вращения равен площади вращающейся фигуры, умноженной на длину пути, пройденного при вращении ее центром тяжести, а площадь поверхности вращения равна длине вращающейся линии, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.*

Предоставляем читателю убедиться, применив эти утверждения, что объем тора равен  $2\pi ar^2$ , а площадь его поверхности равна  $4\pi^2 ar$  (рис. 29). В своих работах

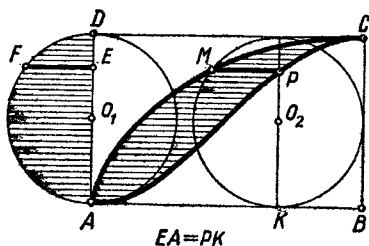


Рис. 28

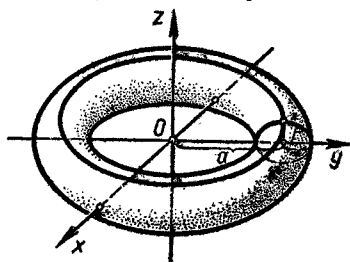


Рис. 29



Гульден старался избежать инфинитезимальных рассуждений, считая их недостаточно строгими. Из-за этого ему не удалось найти полное доказательство своих теорем. Их доказал позже Кавальери с помощью метода неделимых. По-видимому, ни Гульден, ни Кавальери не знали, что за полторы тысячи лет до них эти теоремы доказал Папп методами Архимеда.

**Скорости и касательные.** Вычисление площадей и объемов весьма занимало умы математиков XVII века. Но инфинитезимальные методы применялись ими и в задачах иного рода — для проведения касательных к кривым линиям. Этой областью математики древние геометры занимались мало, они умели проводить касательные лишь к коническим сечениям и к архимедовой спирали.

Проведение касательных тесно связано с вычислением скоростей. Когда точка движется по кривой линии, вектор скорости в каждый момент времени направлен по касательной, а его длина равна линейной скорости движущейся точки. Первый общий метод нахождения касательных придумал Декарт. Он рассматривал касательную как секущую, у которой обе точки пересечения с кривой слились в одну. А так как отыскание точек пересечения Декарт сводил к решению алгебраических уравнений, то ему достаточно было ответить на вопрос, при каких условиях корни алгебраического уравнения сливаются. Таким образом он научился проводить касательные к любым алгебраическим кривым. Метод Декарта позволял находить и асимптоты таких кривых, т. е. прямые, к которым они приближаются в бесконечности, — эти асимптоты можно рассматривать как прямые, касающиеся кривой в бесконечно удаленной точке.

Метод Декарта нельзя было применять к трансцендентным кривым. Но большинство известных в то время трансцендентных кривых возникало как траектории движущихся точек. Поэтому для отыскания касательных и скоростей движения применялись кинематические соображения. Если движение точки можно разложить на два движения, то достаточно найти ее мгновенные скорости в каждом из составляющих движений, а потом сложить их по правилу параллелограмма.

Например, чтобы провести касательную к архимедовой спирали в некоторой точке  $M$ , достаточно провести через эту точку окружность и луч (рис. 30) и отложить на касательной к окружности и на луче векторы, длины

которых равны линейным скоростям вращательного и поступательного движений. Складывая получившиеся векторы, получаем вектор скорости точки, движущейся по спирали. Направление этого вектора указывает, куда направлена касательная, а его длина показывает, с какой скоростью точка движется по спирали.

Таким же образом можно провести касательную к циклоиде. В самом деле, движение точки, описывающей циклоиду, разлагается на вращательное и поступательное, причем скорости этих движений одинаковы. Но Декарт придумал более остроумное решение задачи. Он заметил, что в каждый момент времени точка, в которой катящаяся окружность касается прямой, неподвижна (как неподвижна в каждый момент времени нижняя точка колеса автомобиля). Поэтому движение является в этот момент времени вращением вокруг точки касания, а вектор скорости такого движения найти просто. Этот метод проведения касательных тайл в себе большие возможности для кинематики — в нем впервые была использована идея о мгновенном центре вращения, о том, что любое движение, отличное от поступательного, можно разложить на вращения с переменными центром и угловой скоростью.

**Флюэнты и флюксии.** Ко второй половине XVII века много задач было решено с помощью инфинитезимальных методов. Были найдены объемы и площади многих фигур, проведены касательные к некоторым кривым и найдены длины этих кривых. Математики заметили, что в некоторых случаях удастся свести вычисление объемов и длин к вычислению площадей, а английский математик Исаак Барроу (1630—1677) доказал, что вычисление площадей и проведение касательных связаны друг с другом примерно так, как сложение с вычитанием или умножение с делением, т. е. что эти две задачи обратны друг другу.

Однако, несмотря на обилие накопленного материала, он не был упорядочен — каждая задача решалась своим способом. Кто применял неделимые, следуя Кавальери, кто использовал вслед за Декартом алгебраические и кинематические соображения, а кто вслед за Гульденом применял теоремы о центре тяжести. Все эти разнообразные методы не укладывались в единое исчисление, которое можно выполнять по определенным правилам и которому можно научить любого человека. Чтобы раз-

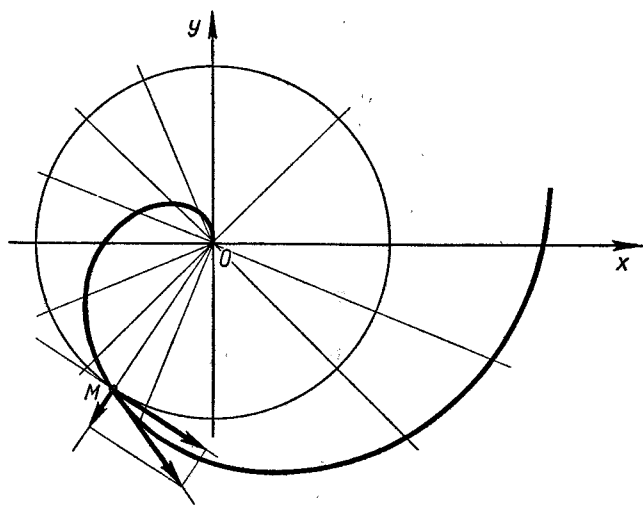


Рис. 30

работать такое исчисление, надо было вскрыть то общее, что лежало за калейдоскопом решенных задач, создать на этой основе стройную систему понятий и потом выработать алгоритмы — правила, по которым можно вычислять. Это было одновременно и почти независимо друг от друга сделано английским физиком и математиком Исааком Ньютоном и немецким философом и математиком Готтфридом Вильгельмом Лейбницем. Любопытно, что ни тот, ни другой не были лишь узкими математиками — их научные интересы охватывали весьма широкие области.

Ньютон в течение своей долгой жизни занимался самыми разными областями науки: оптикой и акустикой, механикой и химией, математикой и астрономией. Но по преимуществу он был физиком. Математика была для него лишь орудием решения физических задач, а астрономия — грандиозной космической лабораторией, в которой проверялись его физические идеи. К сожалению, до нас не дошли открытия Ньютона в области акустики и химии, которым он отдал много сил, — пожар, случившийся в его доме, уничтожил многие неопубликованные рукописи Ньютона, а потом он уже не возвращался к этим исследованиям.

Научные исследования Ньютона продолжались несколько десятилетий, но большую часть этого времени он лишь разрабатывал идеи, к которым пришел в течение двух лет (1665—1667 годы), когда после окончания Кембриджского университета жил на родной ферме, спасаясь от эпидемии чумы, унесшей многие десятки тысяч жизней.

Одной из наиболее жгучих физических проблем того времени было объяснение движения планет. Еще Кеплер сформулировал основные законы этого движения, выразив в виде трех положений результаты многолетних наблюдений своих предшественников. Но сами законы Кеплера не были основаны на каких-либо физических принципах; они напоминали в этом отношении постулаты Бора, описывающие движение электронов в атоме. И как для объяснения постулатов Бора понадобилось создать квантовую механику, после работ Кеплера оказалось необходимо создать науку о движении тел под действием заданных сил и найти силы, управляющие движением планет.

В первую очередь надо было понять, какая же сила отклоняет планеты от прямолинейного и равномерного движения.

Хорошо известен рассказ, восходящий к самому Ньютону, как он размышлял над этими вопросами, отдыхая в саду, и был неожиданно возвращен к реальной действительности яблоком, упавшим на него с дерева. Почему яблоко всегда падает отвесно, подумал он про себя, почему не в сторону, а всегда к центру Земли? Должна существовать притягательная сила в материи, сосредоточенная в центре Земли. Если материя так тянет другую материю, то должна существовать пропорциональность ее количеству. Поэтому яблоко притягивает Землю так же, как Земля яблоко. Должна, следовательно, существовать сила, подобная той, которую мы называем тяжестью, простирающаяся по всей Вселенной.

К мысли, что движение планет вызывается такой силой, приходили и другие ученые, например современник Ньютона Роберт Гук (1635—1703). Делалась и догадка, что эта сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между тяготеющими массами (к ней было несложно прийти, представив себе притягивающую силу как нечто истекающее из Солнца и распространяющееся во все стороны). Но никому до Ньютона не удавалось с

помощью такой гипотезы объяснить все особенности движения планет.

Чтобы решить эту проблему, молодому ученому пришлось создать новый математический аппарат. Из законов свободного падения, он вывел, что постоянная сила придает движущейся точке постоянное ускорение. Отсюда был сделан вывод о пропорциональности ускорения и силы, действующей на движущуюся точку. Поэтому по заданным силам можно найти ускорение точки в каждый момент времени. Задача состояла в том, чтобы по нему найти сначала скорость, а потом и положение точки в каждый момент времени.

Ньютон сразу обобщил эту задачу. И скорость, и координата точки лишь частные случаи переменных величин. Поэтому Ньютон рассмотрел произвольные величины, меняющиеся с течением времени, которые назвал *флюэнтами* (от латинского «флюэре» — течь). В каждый момент времени существовала мгновенная скорость изменения флюэнты, которую он назвал *флюксией*. Общая задача была сформулирована им так:

1) *из данного отношения между флюэнтами вывести соотношение между их флюксиями,*

2) *из данного отношения между флюксиями найти отношение между флюэнтами.*

Иными словами, надо было, зная, как одна переменная величина зависит от другой, найти соотношение между мгновенными скоростями их изменения и, обратно, из заданного соотношения между скоростями вывести соотношение между величинами. Ньютон нашел общие методы решения этих задач. С их помощью он сумел установить, что движение планет может вызываться лишь силой тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния от Солнца до планеты. Он показал, что при определенных условиях тело, находящееся под действием такой силы, может двигаться не только по эллипсу, но и по параболе или гиперболе.

Впоследствии оказалось, что некоторые кометы действительно движутся по таким кривым и потому, появившись однажды, навсегда исчезают. Через два с половиной столетия теория Ньютона была применена к движению электронов в атоме и в первом приближении дала правильное описание этого движения. Лишь более глубокий анализ вопроса заставил ученых принять во внимание квантовые эффекты.

Впечатление, произведенное достижениями Ньютона на его современников, было настолько велико, что Лейбниц назвал его в одном письме «советником господ бога». Новая механика была изложена в его книге «Математические основы натуральной философии», вышедшей лишь через два десятилетия после того, как он сделал свои открытия. Но и в этой книге Ньютон не раскрыл своих методов, а передоказал все результаты с помощью классических методов геометрии древних греков.

Тому были две причины. Во-первых, далеко не все ученые были склонны принять новое исчисление. Многие математики, познакомившиеся с ним по письмам Ньютона, предпочитали работать по старинке. А во-вторых, и это самое главное, методы, которыми он получил свои результаты, не удовлетворяли самого Ньютона — чтобы объяснить, что такое флюксия, что такое мгновенная скорость, ему приходилось говорить о скорости в момент зарождения величины, об исчислении нулей и других довольно туманных вещах. Совсем просто найти среднюю скорость — надо разделить пройденный путь на время. А при вычислении мгновенной скорости и промежутков времени, и путь равны нулю, и надо делить нуль на нуль. В поисках строгого изложения Ньютон начал разрабатывать понятие предела, но и здесь был вынужден использовать наглядные представления, от которых так хотел освободиться.

**Всегообщая характеристика.** Когда ученый занят исследованиями в актуальной области науки и долго не публикует свои результаты, ему вдруг приходится убедиться, что кто-то другой, занимаясь тем же кругом вопросов, получил многие из его утверждений, а кое-где продвинулся дальше него. Так случилось и с Ньютоном: пока он искал строгие обоснования своих способов, похожее исчисление построил другой ученый, уже упоминавшийся нами Лейбниц.

В то время как Ньютон пришел к новому исчислению, отправляясь от физических задач, Лейбниц ставил перед собой более широкие проблемы — он хотел создать универсальный логико-математический метод познания, а науку о бесконечном рассматривал лишь в качестве первого образца такого метода. В этом он был продолжателем дела Декарта, пытавшегося найти общий ключ для решения загадок материального мира путем объединения алгебры и геометрии. Но, как мы уже говорили,

алгебраические методы Декарта были неприменимы к трансцендентным функциям. Оказалось необходимым создать науку о бесконечном, без чего было невозможно методически развивать и науку о конечном.

Целью Лейбница, по его словам, было не только создание науки о числе и пространственном распорядке, но и построении «исчисления более важного, нежели исчисление арифметики и геометрии, и зависящего от анализа идей. Это была бы всеобщая характеристика, создание которой представляется мне одним из наиболее важных дел, какие только можно было бы предпринять». Стремясь создать такую науку, Лейбниц пытался построить своеобразные алгоритмы, предвосхищая идеи математической логики, занимался комбинаторными проблемами, намечал пути развития общей алгебры.

Состояние науки того времени не позволило Лейбницу осуществить свои замыслы в полном виде. Как писал позднее Иммануил Кант, «знаменитый Лейбниц обладал многими действительными знаниями, которыми он обогатил науки, но еще более грандиозны были его замыслы, выполнения которых мир тщетно от него ждал». Но, руководствуясь своими общими идеями, он придумал особое исчисление для бесконечно малых величин, которое позволяло легко и единообразно получать результаты, стоившие его предшественникам больших усилий. И эти, и новые результаты, касавшиеся самых разнообразных функций и кривых, получались по четко определенным правилам. Как писал сам Лейбниц, «причина преимуществ этого нового исчисления заключается в том, что оно разгружает воображение в проблемах, которые Декарт исключил из своей геометрии под тем предлогом, что они чаще всего приводят к механике, в действительности же потому, что они не подходили к его исчислению».

Важной заслугой Лейбница в деле развития новых математических идей была разработка продуманной системы названий и обозначений. Отсутствие подходящей символики может затормозить развитие науки, мешает ученым выразить свои идеи. Поэтому выбор системы символов, а иногда и отдельных символов имеет огромное значение. Удачно выбранная символика как бы берет на свои плечи большую часть умственного труда ученого, облегчает творческий процесс. А иногда символика приводит к результатам, необъяснимым с точки зрения суще-

ствующих понятий, и оказывается, что понятия нужно обобщить так, чтобы с их помощью можно было объяснить и эти, кажущиеся лишь «формальными» результаты. Сам Лейбниц отмечал роль символики в процессе творчества. «Следует заботиться, — писал он, — о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это большею частью бывает, когда обозначения коротко выражают и как бы отображают интимнейшую сущность вещей. Тогда поразительным образом сокращается работа мысли...» Обозначения Лейбница в дифференциальном и интегральном исчислениях оказались настолько продуманными и удачными, настолько соответствовали сути дела, что и теперь они используются без существенных изменений.

**Исчисление бесконечно малых.** Основой построенного Лейбницем исчисления бесконечно малых величин были понятия дифференциала и интеграла, над которыми он размышлял, начиная с 1675 года. Они должны были составить основу его книги «Наука о бесконечном», написать которую он мечтал долгие годы. К сожалению, и этому плану не суждено было осуществиться — вместо книги появился ряд статей, выходивших в свет с 1684 по 1715 год. Первый мемуар, посвященный новому исчислению, был опубликован в мае 1684 года и имел название «Новый метод максимумов, минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчислений».

В этой статье впервые в печати появилось слово *дифференциал* (от латинского слова «дифферентиа» — разность). Оно было определено чисто геометрически. Лейбниц изображал график функции  $y=f(x)$ , брал на этом графике точку  $M(x, y)$  и проводил касательную к кривой в этой точке (в те времена никому не приходило в голову, что есть кривые, к которым ни в одной точке нельзя провести касательную). После этого он брал любой отрезок и обозначал его длину  $dx$ . *Дифференциалом функции* он называл такой отрезок, что отношение его длины  $dy$  к  $dx$  равно отношению длин отрезков  $MN$  и  $NP$  (рис. 31). Если освободить это определение от приданной ему Лейбницем геометрической формы, то получится определение дифференциала, которым пользуются в современной математике. Однако, чтобы вывести формулы для дифференцирования суммы, произведения



и частного, Лейбницу пришлось считать дифференциалы бесконечно малыми величинами, не уточняя, что это значит. Только при этом условии он мог вывести из равенства

$$(u + du)(v + dv) - uv = udv + vdu + dudv$$

соотношение

$$d(uv) = udv + vdu. \quad (1)$$

Он говорил, что  $dudv$  бесконечно мало по сравнению с  $du$  и  $dv$ , а потому этим слагаемым можно пренебречь. С помощью таких же рассуждений Лейбниц вывел соотношения:

$$d(u + v) = du + dv, \quad (2)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2}, \quad (3)$$

$$d(x^a) = ax^{a-1}dx. \quad (4)$$

При этом он указал, что формула (4) верна не только для натуральных, но и для любых значений  $a$ . Пользуясь этими формулами, он уже мог продифференцировать любую функцию, в выражение которой входили только арифметические операции и извлечения корней.

Лейбниц показал, как применять разработанный им алгоритм к проведению касательных, отысканию максимумов и минимумов, к исследованию функций на выпук-

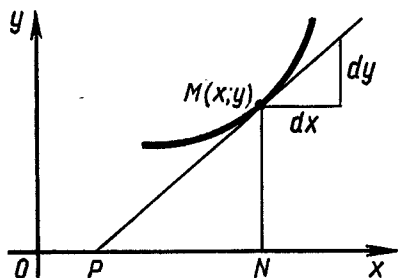


Рис. 31

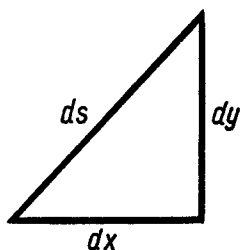


Рис. 32

лость и вогнутость, определению кривизны и т. д. Например, он рассматривал кривую как состоящую из бесконечного числа бесконечно малых прямолинейных отрезков. Продолжая эти отрезки, он получал касательные. При этом, по Лейбницу, проекциями бесконечно малых отрезков кривой на оси координат были  $dx$  и  $dy$  (рис. 32), а потому угловой коэффициент касательной равнялся дроби  $\frac{dy}{dx}$ . Из того же треугольника, который Лейбниц назвал *характеристическим*, следовало, что дифференциал длины дуги кривой выражается формулой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Столь же просто в исчислении Лейбница можно было найти мгновенную скорость движения (т. е. ньютонову флюксию). Для этого достаточно было взять дифференциал времени  $dt$  (т. е., по взглядам Лейбница, бесконечно малый промежуток времени) и соответствующий ему дифференциал пути  $dx$  (т. е. путь, пройденный за промежуток времени  $dt$ ), а потом разделить  $dx$  на  $dt$ :

$$v_{\text{мгн}} = \frac{dx}{dt}.$$

И при проведении касательных, и при вычислении скоростей у Лейбница возникло отношение двух дифференциалов. Этому отношению, которое уже не было бесконечно малым, присвоили название *производной* — то была новая функция, получавшаяся из данной функции  $y = f(x)$  с помощью операций над бесконечно малыми. Позже для производной укрепилось обозначение  $y'$  или  $f'(x)$ .

Еще одним важным понятием, которое ввел в математику Лейбниц, был *интеграл*. Он рассматривал, например, площадь фигуры (изображенной на рисунке 33) как сумму площадей бесконечно тонких вертикальных полосок, основания которых равны  $dx$ . Так как площадь каждой такой полоски в обозначениях Лейбница равнялась  $f(x)dx$ , то вся площадь была суммой бесконечного множества таких выражений. Эту бесконечную сумму бесконечно малых слагаемых Лейбниц назвал *интегралом* (от латинского слова «интегер» — целый) и предложил обозначать символом  $\int f(x)dx$  (знак  $\int$  — своеобразная запись буквы  $S$  — первой буквы латинского слова

«summa»). Позднее стали указывать начальную и конечную абсциссу и писать:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Поскольку интегралы были, по теории Лейбница, суммами дифференциалов, то между операциями дифференцирования и интегрирования была примерно такая же связь, как между вычитанием и сложением. Это позволяло решать задачи интегрирования, опираясь на выведенные уже формулы дифференцирования. С помощью интегрирования Лейбниц и его ученики решали задачи, в которых требовалось найти кривые по свойствам их касательных. Обычно такие задачи приводили к уравнениям, содержащим не только переменные, но и их дифференциалы. Эти уравнения называли *дифференциальными*. К дифференциальным уравнениям приводили и задачи механики.

**Собачья кривая.** За два десятка лет Лейбниц и его ученики (особенно братья Якоб и Иоганн Бернулли) решили больше инфинитезимальных задач, чем это было сделано за все предшествующие столетия. Чтобы показать читателю, как они это делали, рассмотрим решенную Лейбницем задачу о трактрисе, или, как ее еще называют, «собачьей кривой».

Пусть по оси абсцисс бежит собака, а ее хозяин (первоначально находившийся на оси ординат) бежит за ней так, что поводок все время натянут. Тогда поводок будет направлен по касательной к пути хозяина. Требуется найти, по какой линии бежит хозяин собаки. Эта задача допускает следующую математическую формулировку:

*Найти такую кривую, что отрезок касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, имеет постоянную длину.*

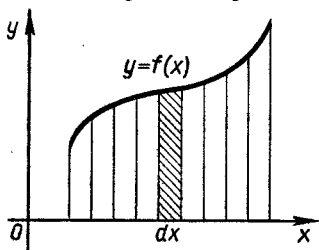


Рис. 33

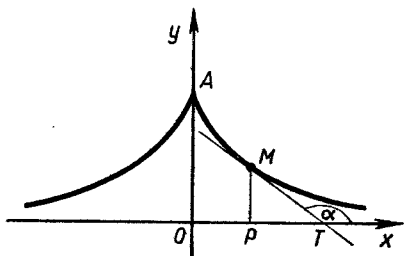


Рис. 34

Чтобы решить эту задачу, заметим, что в треугольнике  $MPT$  (рис. 34) имеем  $MT = a$  и  $MP = y$ , а потому  $PT = \sqrt{a^2 - y^2}$ . Значит,  $\operatorname{tg} \alpha = \mp \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ , где минус при  $x > 0$ , а плюс при  $x < 0$ . Но мы знаем, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ , и потому получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \text{ или } dx = \mp \frac{\sqrt{a^2 - y^2} dy}{y}.$$

Значит,  $x = \mp \frac{\sqrt{a^2 - y^2} dy}{y}$ . Подсчеты, которые мы опускаем, показывают, что наше дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, а именно

$$x = \mp \left( a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \right) + C,$$

где  $C$  — любое число. Значение  $C$  определяется тем, где стоял хозяин собаки в начале бега. Если он находился в точке  $A(0, a)$  (в этот момент поводок был направлен по оси ординат), то  $C = 0$  и решение имеет вид

$$x = \mp \left( a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \right).$$

Эту кривую называют *трактрисой*. Через полтора столетия после ее открытия она сыграла роль в утверждении неевклидовой геометрии Лобачевского. Оказалось, что если повернуть трактрису вокруг оси абсцисс, то на полученной поверхности вращения будет выполняться геометрия Лобачевского.

К более сложному дифференциальному уравнению приводит *задача о погоне*, в которой надо найти траекторию точки  $M$ , у которой вектор скорости все время направлен на точку  $N$ , если известно, что точка  $N$  движется по кривой  $\Gamma$ , а линейные скорости обеих точек постоянны.

**Эволюты и эвольвенты.** Умение проводить касательные к различным кривым оказалось полезно для решения многих практических задач. После того как Галилей построил свой первый телескоп, оптика превратилась в прикладную науку. Законы отражения и преломления света позволяли без труда рассчитывать ход светового луча для случая, когда зеркало или поверхность раздела

двух сред были плоскими. Если же они были кривыми поверхностями, приходилось отсчитывать все углы от плоскостей, касавшихся этих поверхностей.

Другое важное приложение касательных было связано с постройкой маятниковых часов. Период качания маятника лишь приближенно независим от размаха этих качаний. При больших углах размаха этот период меняется, что нарушает правильный ход часов. Поэтому голландский ученый Гюйгенс поставил задачу: по какой кривой должен перемещаться конец маятника, чтобы период его колебаний не зависел от его размаха? Такую кривую заранее называли *таутохроной* (по-гречески «таутос» — равный, «хронос» — время). Однако новое название придумали зря — таутохрона оказалась старой знакомой, а именно циклоидой.

Легко заставить маятник двигаться по дуге окружности, для этого достаточно подвесить его за конец нити. А как заставить его описывать циклоиду? И тут Гюйгенсу пришла в голову замечательная идея — нужно не просто подвесить маятник, а еще сделать такую направляющую, чтобы нить маятника при качании все время ее касалась. Тогда в каждый момент времени маятник будет вращаться не вокруг точки подвеса, а вокруг точки касания с направляющей. А теперь осталось лишь подобрать направляющую так, чтобы конец маятника двигался по циклоиде. Когда Гюйгенс решил эту задачу, оказалось, что направляющая тоже должна быть циклоидой, только иначе расположенной (рис. 35). Отправляясь от этой

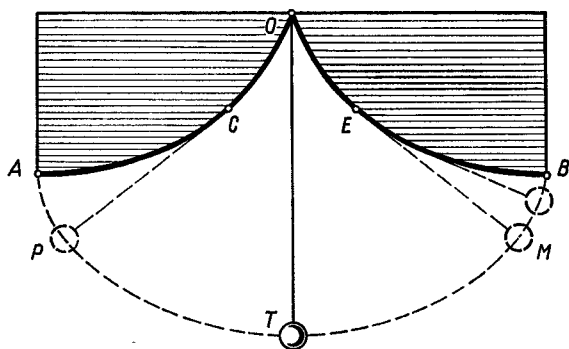


Рис. 35

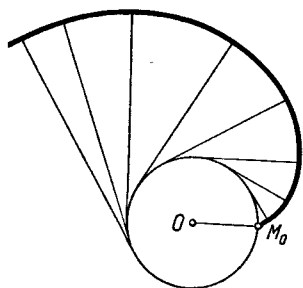


Рис. 36

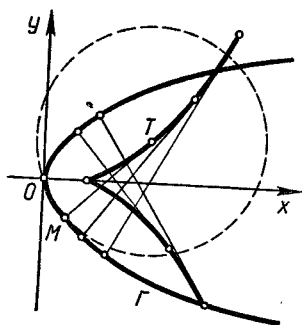


Рис. 37

частной задачи, была рассмотрена более общая проблема: как найти такую направляющую  $\Gamma_1$ , чтобы маятник при качании описывал заданную кривую  $\Gamma$ . Так как нить, на которой подвешен маятник, все время касается кривой  $\Gamma_1$ , эта задача оказалась тесно связана с проведением касательных. Для пары кривых  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  придумали особые названия: кривую  $\Gamma_1$  называли *эволютой* кривой  $\Gamma$ , а кривую  $\Gamma$  — *эвольвентой* кривой  $\Gamma_1$  (от латинского «эвольвентис» — развертка).

В технике часто применяется эвольвента окружности, т. е. линия, описываемая концом  $M_0$  нити, которую наматывают на окружность (рис. 36). По этой кривой очерчивают лопасти турбинного колеса, профили зубчатых колес, шайбу, используемую в подъемном механизме разводного моста, и т. д.

**Кривизна.** Из определения эвольвенты видно, что когда точка  $M$  движется по ней, отрезок  $MT$  все время касается эволюты и перпендикулярен касательной к эвольвенте (в каждый момент времени точка  $M$  как бы вращается вокруг точки касания  $T$ ). Поэтому эволюту данной кривой можно найти следующим образом: провести в каждой точке этой кривой прямую, перпендикулярную касательной (такие прямые называют нормальями), и найти кривую, касающуюся всех этих нормалей (рис. 37). Из рисунка видно, что точка пересечения «бесконечно близких» нормалей «бесконечно близка» к эволюте. Поэтому, если пустить по каждой нормали луч

света, то на эволюте свет будет концентрироваться и ее точки окажутся ярче остальных точек плоскости. В оптике эволюту называют *каустикой* (от греческого слова «каустикос» — жгучий).

Очевидно, что окружность с центром в точке  $T$  теснее, чем все остальные окружности, примыкает к кривой  $\Gamma$  в точке  $M$ . Она получила название *окружности кривизны* для кривой  $\Gamma$  в точке  $M$ , а ее радиус  $R$  — *радиуса кривизны* для  $\Gamma$  в этой точке.

Чем больше радиус окружности, тем меньше она искривлена. Поэтому естественно назвать *кривизной* линии величину, обратную радиусу кривизны,  $k = \frac{1}{R}$ . В разных точках кривой кривизна различна. Например, у параболы наибольшая кривизна будет в вершине, а по мере удаления от вершины она уменьшается.

Кривизну можно определить, не пользуясь окружностью кривизны. При полном обходе окружности радиуса  $R$  касательная к ней поворачивается на  $360^\circ$ , т. е. на  $2\pi$  радиан. Длина этой окружности равна  $2\pi R$ , а потому вдоль дуги единичной длины поворот касательной равен  $\frac{2\pi}{2\pi R} = \frac{1}{R}$ , т. е. кривизне этой окружности. Таким образом, кривизна  $k$  показывает поворот касательной на единицу длины кривой. Из-за того что кривизна меняется от точки к точке, надо рассчитывать поворот касательной, говоря языком Лейбница, на бесконечно малой дуге  $ds$ , т. е. брать отношение  $\frac{d\varphi}{ds}$ , где  $d\varphi$  — угол поворота касательной вдоль бесконечно малой дуги  $ds$ .

Расчеты, которые мы опускаем, показывают, что кривизна графика функции  $y = f(x)$  выражается следующей формулой:

$$k = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где  $y''$  — вторая производная функции (т. е. производная от ее производной). Отсюда видно, что в точках, где вторая производная равна нулю, кривизна линии тоже обращается в нуль и линия как бы выпрямляется. Обычно в таких точках кривая переходит с одной стороны касательной на другую. Поэтому их называют *точками перегиба*. Но может случиться, что, несмотря на обраще-

ние в нуль второй производной в некоторой точке, кривая в некоторой окрестности этой точки находится по одну сторону от касательной, проведенной в этой точке.

Понятие кривизны оказалось весьма полезно при решении самых разнообразных задач, например при разбивке закруглений железнодорожных линий. Мы расскажем сейчас, какую роль сыграло это понятие при изучении изгиба балок.

**Математика и строительное искусство.** Когда люди перестали укрываться от холода и хищных зверей в пещерах и начали строить жилища, они задумались над тем, как сделать сооружения прочными и долговечными. Один из законов вавилонского царя Хаммурапи гласил:

«Если построенный архитектором дом развалится и при этом погибнет его владелец, архитектор подлежит смертной казни.

Если при этом погибнет сын владельца дома, смертной казни подлежит сын архитектора.

Если погибнет раб владельца дома, архитектор обязан возместить владельцу потерю».

Поскольку наук о прочности и надежности в то время не было, строители исходили из эмпирических правил, накопленных поколениями зодчих. Впрочем, и в конце XIX века были кораблестроители, исходившие из правила: «Ты размеры-то на глаз поставь, да полдюйма на прочность прибавь». А так как рабский труд был дешев, то древние архитекторы могли материалов не жалеть. Поэтому сооружаемые ими здания имели запас прочности, во много раз превосходивший разумные пределы. Этим и объясняется долговечность таких памятников древнего зодчества, как египетские пирамиды или Гардский мост во Франции, «сработанный еще рабами Рима».

В мрачные столетия средневековья многие из накопленных в древности знаний были забыты, и архитекторам эпохи Возрождения пришлось постигать свое искусство почти что заново. Но теперь на помощь пришла наука. Первые исследования по сопротивлению материалов, прочности арок, балок и других элементов строительных конструкций провел гениальный художник и ученый Леонардо да Винчи (1452—1519). Он говорил, что «механика — этой рай для математической науки, поскольку мы получаем в ней плоды математики».

Леонардо установил, что «во всяком бруске, опирающемся на опоры, но имеющем возможность свободно



изгибаться, при неизменности поперечного сечения и однородности материала, та его часть, которая находится на наибольшем расстоянии от опор, изгибается больше всего». В записных книжках Леонардо сохранились описания опытов по разрыву проволоки под действием нагрузки, изгибу балок и т. д. К сожалению, Леонардо не опубликовал свои открытия. Но некоторые ученые (в частности, Кардано) изучали сохранившиеся записи и пользовались ими. Полагают, что с достижениями Леонардо был знаком и Галилей. Во всяком случае, некоторые страницы его последней книги «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящиеся к механике и местному движению», которая вышла в свет в 1638 году, очень напоминают соответствующие места из записей Леонардо.

Галилей также поставил ряд опытов. Он установил, например, что «любая линейка или призма, ширина которой больше ее толщины, окажет большее сопротивление излому, когда она поставлена на ребро, чем когда она лежит плашмя, и притом во столько раз, во сколько ширина больше толщины». Это были первые законы науки о сопротивлении материалов, выраженные в математической форме. Галилей применял для решения задач о сопротивлении балок излому геометрические методы. Разумеется, его труды, как и большинство работ первооткрывателей, не были свободны от ошибок.

Дальнейшее развитие науки о сопротивлении материалов связано с именами английского ученого Роберта Гука, французского физика Мариотта и других. Эти ученые исследовали, от каких свойств балок зависит их прочность, от чего зависит прогиб балок под действием той или иной нагрузки и т. д. Оказалось, что на величину прогиба влияет целый ряд обстоятельств.

Под одной и той же нагрузкой деревянная балка изогнется сильнее, чем металлическая, длинная — сильнее, чем короткая, тонкая — сильнее, чем толстая. Зависимость прогиба балки от материала, из которого она сделана, связана с особой величиной  $E$ , называемой *модулем Юнга*. Чем больше модуль Юнга данного материала, тем меньше изготовленный из этого материала стержень вытягивается под действием заданной нагрузки. Для стали модуль Юнга в 20 раз больше, чем для дуба, и в 400 раз больше, чем для каучука. Поэтому стальные балки прогибаются меньше, чем деревянные. Иссле-

дование зависимости прогиба балки от материала, из которого она сделана, — это дело скорее физики, чем математики. Математиков больше интересует зависимость прогиба от длины балки, а также от размеров и формы ее сечения. Под действием изгибающей силы нижние слои балки растягиваются, а верхние сжимаются. Между ними есть слой, который не растягивается и не сжимается. Его называют *нейтральным слоем*. Если сечение балки прямоугольное, то этот слой находится посередине. Соппротивление балки изгибу зависит от особого числа, называемого *моментом инерции* этого сечения относительно нейтрального слоя. Чтобы подсчитать этот момент, поступают следующим образом. Сечение балки мысленно разрезают на очень тонкие горизонтальные слои, и массу каждого слоя умножают на квадрат его расстояния от нейтрального слоя. Сумма этих произведений дает приближенное значение момента инерции. Чем тоньше слои, на которые разрезается сечение, тем с большей точностью получится ответ. Точное значение момента инерции выражается в виде интеграла. С помощью интегрального исчисления нашли, что момент инерции для круглого сечения радиуса  $R$  равен  $\frac{\pi \rho R^4}{4}$ , а для квад-

ратного сечения со стороной  $a$  он равен  $\frac{\rho a^4}{12}$ , где  $\rho$  — плотность материала на единицу площади. Таким образом, момент инерции пропорционален четвертой степени линейных размеров сечения.

Произведение  $EI$  модуля Юнга на момент инерции сечения балки называют *жесткостью* этой балки. Можно увеличить жесткость балки, не меняя площади ее сечения. Для этого надо, например, заменить сплошную балку трубой. В велосипедах, чтобы достичь большой прочности и облегчить вес конструкции, стали делать корпус не из сплошных стержней, а из труб. Но задолго до того «патент» на это изобретение взяли птицы, у которых кости внутри полые.

**Дифференциальное уравнение упругой линии.** Больших успехов в математической теории упругости добились работавшие в Петербурге Леонард Эйлер и Даниил Бернулли. В их работах было установлено, что в каждой точке кривизна *упругой линии* балки, т. е. линии, образованной центрами нейтральных слоев, пропорциональна изгибающему моменту в этой точке (*изгибающим момен-*

том называют сумму моментов относительно данной точки всех сил, находящихся от нее по одну сторону). Было доказано, что коэффициент пропорциональности обратен жесткости балки (чем жестче балка, тем меньше она искривляется при заданной нагрузке), а вторая производная изгибающего момента равна интенсивности нагрузки в данной точке (т. е. нагрузке, рассчитанной на единицу длины). Учитывая формулу для кривизны, можно записать дифференциальное уравнение упругой линии в следующем виде:

$$\left( \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right)'' = \frac{q(x)}{EI}. \quad (1)$$

Здесь  $y = f(x)$  — уравнение упругой линии,  $q(x)$  — интенсивность нагрузки в точке  $x$ .

Достаточно посмотреть на это уравнение, чтобы убедиться в его сложности — в него входят производные разных порядков, причем одни из них стоят в числителе, другие — в знаменателе, да притом в квадрате. Но встречающиеся на практике балки обычно очень мало изогнуты (сильно изгибаются балки лишь перед тем, как разрушиться). Поэтому значение  $y'$  обычно весьма мало, а  $(y')^2$  — того меньше. Это позволяет пренебречь в первом приближении слагаемым  $(y')^2$  и записать уравнение (1) в упрощенном виде:

$$y^{(4)} = \frac{q(x)}{EI}, \quad (2)$$

где через  $y^{(4)}$  обозначена четвертая производная от  $y$ .

Такое упрощение задачи за счет отбрасывания малых слагаемых часто применяется в математике. Оно позволяет сводить получающиеся уравнения к более простым, содержащим искомую функцию и ее производные лишь в первых степенях. Эти уравнения называют *линейными*, а потому соответствующее упрощение задачи называют *линеаризацией*. Разумеется, линеаризировать задачу можно лишь при определенных условиях, иначе можно оказаться в положении героя известного анекдота, искавшего потерянный кошелек под фонарем не потому, что он там его обронил, а потому, что там светло. Например, часовую пружину тоже можно рассматривать как балку. Но эта «балка» настолько искривлена, что пренебрегать

значениями  $(y')^2$  никак нельзя, а потому изучение часовых пружин требует решения не линеаризованного уравнения (2), а исходного уравнения (1). А иногда приходится иметь дело с еще более сложными уравнениями — бывает нужно учесть и то, что при изгибе балки ее сечения, перпендикулярные оси, сдвигаются и деформируются. В каждом случае выбор уравнения, описывающего данный физический процесс (в нашем случае — изгиб балки), зависит от требуемой точности решения, от величины тех или иных входящих в это уравнение выражений.

Если ограничиваться линеаризованной задачей, то отыскание упругой линии балки сводится к решению дифференциального уравнения (2). Так как в это уравнение входит четвертая производная, то его называют уравнением *четвертого порядка*. Решение такого уравнения содержит четыре произвольные постоянные. Значения этих постоянных нельзя найти из самого уравнения, для этого нужны еще дополнительные условия. Дело в том, что задание нагрузки  $q(x)$  еще не определяет формы прогиба балки. При одной и той же нагрузке балка изогнется по-разному в зависимости от того, как закреплены ее концы. Чаще всего концы балки заделывают в стену. В этом случае на концах равны нулю как сам прогиб балки, так и его производная (ведь производная равна угловому коэффициенту касательной, а на концах касательная к линии прогиба горизонтальна). Поэтому уравнение линии прогиба балки должно удовлетворять граничным условиям  $y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$ . Другой вид имеют граничные условия, если концы балки не заделаны в стену, а свободно лежат на опорах. А бывают и балки, у которых в стену заделан лишь один конец, а второй или опирается, или свободно висит в воздухе. В каждом случае получается свое решение уравнения (2).

**Сначала стены, а фундамент потом.** Несмотря на все успехи, достигнутые при создании нового исчисления и применении его к различным практическим задачам, у многих математиков оставалось чувство неудовлетворенности — слишком ненадежен был фундамент, на котором основывались все эти достижения. Неясны были даже основные понятия дифференциала и интеграла. Если дифференциал бесконечно мал, но отличен от нуля, то можно ли отбрасывать произведение двух дифференциалов? Что такое сумма бесконечного числа бесконечно

малых? Если они равны нулю, то и сумма равна нулю, а если отличны от нуля, то сумма должна равняться бесконечности. Да и что такое, в конце концов, сами бесконечно малые? Можно ли рассматривать их как очень малые постоянные, например как песчинку по сравнению с земным шаром или частицу «магнитной жидкости» по сравнению с песчинкой (тогда думали, что магнетизм связан с какой-то жидкостью, состоящей из мельчайших частиц, которые могут проходить через поры вещества)?

На все эти вопросы основатели исчисления давали туманные ответы, а их последователи успокаивали своих учеников, говоря: «Работайте, и вера к вам придет». И действительно, применение новых методов всегда давало правильные результаты. Но критики не унимались. Они говорили, что дифференциал — это тень величины, а дифференциал от дифференциала — тень от тени. Небезызвестный епископ Беркли, философ-идеалист, обращаясь к неверующему астроному Галлею, насмешливо писал, что те, кто верит в исчисление бесконечно малых, спокойно могут поверить и евангельским сказаниям.

Лишь в начале XIX века французскому математику Огюстену Коши (1789—1857) удалось рассеять мистический туман, который окутывал исчисление бесконечно малых. Он положил в основу не туманное понятие бесконечно малого дифференциала, а отношение  $\frac{dy}{dx}$  двух дифференциалов, т. е. производную от функции  $y = f(x)$ . Это отношение, по сути дела, рассматривал еще Лейбниц, толкуя его геометрически, как угловой коэффициент касательной (т. е. тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс). Но Коши дал для производной определение, не опираясь на геометрию, а используя лишь понятие предела. Точно так же он определил интеграл, не пользуясь суммированием бесконечного числа бесконечно малых величин. Да и основное понятие бесконечно малой величины было лишено им ореола таинственности — оказалось, что это просто величина, предел которой равен нулю.

Таким образом, под уже выстроенное здание анализа бесконечно малых был подведен прочный фундамент. Заметим, что это не единственный случай, когда в математике сначала строят стены, а фундамент закладывают потом. К. Маркс говорил: «В отличие от других архитекторов, наука не только рисует воздушные замки, но и

возводит отдельные жилые этажи здания, прежде чем заложить его фундамент»<sup>1</sup>.

Например, в конце XIX века английский электротехник Хевисайд (1850—1925) построил так называемое *операционное исчисление*, в котором обращался с операцией дифференцирования как с обычным символом буквенной алгебры, позволял себе делить на выражения, содержащие этот символ, и т. д. Математики, воспитанные в строгих правилах, возмущались такой бесцеремонностью. Но Хевисайд получил правильные результаты, а критикам отвечал, что не собирается отказываться от вкусного обеда лишь потому, что не знаком со всеми тайнами пищеварения. Много лет спустя под операционное исчисление Хевисайда была подведена прочная база.

В 20-х годах нынешнего столетия английский физик Дирак начал использовать в своих работах функцию  $y = \delta(x)$  (*дельта-функцию*), которая была совсем не похожа на обычные функции. Он обращался с ней без всякого почтения — дифференцировал, интегрировал, умножал на другие функции, сдвигал вдоль оси и т. д. Почти для всех математиков того времени эти действия Дирака казались игрой в формулы. Те же ученые, которые в своих математических исследованиях пользовались дельта-функцией, скрывали это в публикуемых ими работах и давали полученным с ее помощью теоремам вполне «классические» доказательства. Но потом математики построили теорию *обобщенных функций*, весьма частным случаем которой была теория дельта-функции Дирака, и начали использовать дельта-функцию со спокойной совестью.

Вообще, физики придают не слишком большое значение математической строгости и, хотя со времени работ Коши прошло полтора столетия, до сих пор применяют в своих работах нестрогий, но удобный язык бесконечно малых. Они и сейчас пишут так: «Мы будем считать промежуток времени  $dt$  очень малым, математически выражаясь, бесконечно малым», хотя столь вольные выражения в математике уже не употребляются. Объясняется это тем, что понятия математики отражают те или иные стороны реального мира. Поэтому даже нестрогие рассуждения не приводят к ошибкам, если иметь

---

<sup>1</sup> Маркс К. К критике политической экономии. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 13, с. 43.

в виду реальное содержание применяемых понятий. Это и позволяет физикам и инженерам использовать своеобразный код и кратко выражать понятия, для определения которых математикам приходится употреблять слишком много слов. Этот код весьма нагляден. Академик Н. Н. Лузин писал: «Идея актуально малого имеет какие-то бесконечно глубокие корни в уме. Когда ум начинает свое знакомство с анализом, словом, когда для него весна, он начинает всегда именно с актуально малых, которые можно назвать «элементами» количеств. Но постепенно, шаг за шагом, по мере накопления у него знаний, теорий, пресыщения абстракциями, усталости, ум начинает забывать свои первоначальные стремления, улыбаться их «ребячеству». Короче, когда приходит осень ума, он дает себя убедить в единственности правильного обоснования при помощи пределов».

В этой книге мы тоже будем иногда применять язык исчисления бесконечно малых, помня, что рассуждения легко могут быть переведены с него на язык строгой математики. Перейдем теперь к рассказу о том, как трактуются понятия производной и интеграла в современной математике.

**Производная — это скорость.** Во второй половине XIX века курс математической физики в университете Глазго читал знаменитый физик Уильям Томсон (1824—1907), получивший за свои научные заслуги титул лорда Кельвина (читатель, конечно, знаком с названной в его честь шкалой Кельвина). Однажды, войдя в аудиторию, Кельвин обратился к студентам с вопросом: «Что такое  $\frac{dx}{dt}$ ?» В ответ он получил все мыслимые логические определения производной. «Ах, бросьте вы этого Тодгентера (профессор «чистой математики» в Кембриджском университете),  $\frac{dx}{dt}$  — это скорость!», — воскликнул Кельвин.

И действительно, положенное Коши в основу математического анализа понятие производной было не чем иным, как ньютоновской флюксией. Только в отличие от Ньютона Коши не считал понятие мгновенной скорости самоочевидным, а определял его, исходя из понятия средней скорости. Как известно, если точка  $M$  движется по прямой линии, то ее *средней скоростью* за промежуток времени  $[t_1, t_2]$  называют выражение

$$v_{\text{ср}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad (1)$$

где  $x_1$  — координата точки в момент времени  $t_1$ , а  $x_2$  — ее координата в момент времени  $t_2$ .

Средняя скорость дает весьма расплывчатую информацию о движении точки. Прямолинейно движущаяся точка может менять направление движения (представьте себе, например, поезд, совершающий рейсы по железной дороге Москва — Ленинград). Может случиться, что в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  точка находится в одном и том же месте (например, поезд совершил рейс из Москвы в Ленинград и вернулся обратно). Тогда формула (1) дает нулевое значение для средней скорости. Этого недостаточно для того, чтобы ответить, например, на вопрос, с какой скоростью поезд прошел участок дороги от ст. Бологое до Ленинграда, и уж совсем мало для того, чтобы сказать, с какой скоростью он въехал на мост через Волгу.

Поэтому будем уменьшать промежуток времени  $[t_1, t_2]$ , оставляя момент  $t_1$  неизменным. Для большинства изучаемых в физике движений средняя скорость будет при этом приближаться к некоторому значению, называемому *мгновенной скоростью* в момент времени  $t_1$ . Итак,

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} v_{\text{ср}} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

По-другому эту формулу записывают в виде

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

где  $\Delta x = x_2 - x_1$  называют *приращением координаты* точки, а  $\Delta t = t_2 - t_1$  — *приращением времени*. В таком виде определение мгновенной скорости изменения переносится на любые функции: *мгновенной скоростью изменения функции  $y = f(x)$  при  $x = x_1$  называют предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю*. Эту мгновенную скорость изменения называют значением производной от  $f(x)$  в точке  $x_1$  и обозначают  $f'(x_1)$ . Итак,

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .



Разумеется, чтобы сделать это определение вполне завершенным, надо еще строго определить понятие предела функции. Коши назвал число  $b$  *пределом функции*  $y=f(x)$ , когда  $x$  стремится к  $a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что из неравенств  $|x-a| < \delta$ ,  $x \neq a$ , вытекает неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

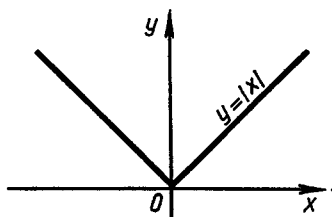


Рис. 38

Следует отметить, что не все функции имеют производную в каждой точке. Мы знаем, что на геометрическом языке производная — это угловой коэффициент касательной к графику функции. Поэтому если в какой-нибудь точке к графику функции  $y=f(x)$  нельзя провести касательную, то в этой точке у функции нет производной. Например, ее нет у функции  $y=|x|$  в точке  $x=0$  (рис. 38). Математики начала XIX века были твердо уверены, что точки, в которых функция не имеет производной, встречаются весьма редко; те функции, с которыми они сталкивались в практических задачах, имели производные во всех точках, где были определены. Во всяком случае, это было верно для непрерывных функций, т. е. функций, график которых можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги (такие «монстры», как функция Дирихле, в счет не шли). Каково же было удивление всех математиков, когда в 1872 году Карл Вейерштрасс (1815—1897) опубликовал пример непрерывной функции, не имевшей производной ни в одной точке! Позднее узнали, что за несколько лет до Вейерштрасса пример такой функции построил чешский ученый Больцано (1781—1848), однако эта работа была опубликована лишь через много десятилетий после его смерти.

Приведем пример Больцано с некоторыми несущественными изменениями. Возьмем отрезок  $[0, 1]$ , разделим его на четыре равные части и над двумя средними частями построим равнобедренный прямоугольный треугольник. Получившаяся линия является графиком некоторой функции, которую мы обозначим через  $y=f_1(x)$ . Разделим теперь каждую из четырех частей еще на четыре части и в соответствии с этим построим еще четыре треугольника. Мы получим график второй функции  $y=f_2(x)$ . Если сложить эти две функции, то график суммы

$y = f_1(x) + f_2(x)$  будет иметь уже больше изломов, причем эти изломы будут гуще расположены. Продолжая описанный процесс до бесконечности, мы получим в пределе непрерывную линию, у которой излом — в каждой точке, а потому ни в одной точке к ней нельзя провести касательную. Значит, эта функция непрерывна, но ни в одной точке не имеет производной.

**Первообразная функция и интеграл.** С помощью операции дифференцирования можно, например, найти мгновенную скорость движущейся точки, зная закон ее движения. Но часто возникает обратная задача — найти закон движения точки, зная ее мгновенную скорость в каждый момент времени (например, самопишущий прибор записывает все показания спидометра, и надо по этим показаниям определить положение автомобиля в каждый момент времени). Чтобы решить такую задачу, надо уметь восстанавливать функцию по ее производной.

Функцию  $F(x)$ , производная которой равна функции  $f(x)$ , называют *первообразной* для  $f(x)$ . Например,  $x^3$  — первообразная для  $3x^2$ , так как  $(x^3)' = 3x^2$ . Но  $x^3 + 5$  тоже является первообразной для  $3x^2$ , поскольку и  $(x^3 + 5)' = 3x^2$ . Вообще, любая функция вида  $x^3 + C$  является первообразной для  $3x^2$ . Множество всех первообразных для  $f(x)$  называют *неопределенным интегралом* для этой функции и обозначают  $\int f(x) dx$ . Можно доказать, что

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где  $F(x)$  — какая-нибудь первообразная для  $f(x)$ , а  $C$  — произвольная постоянная.

Поясним смысл этой произвольной постоянной на примере движения автомобиля. Если мы знаем мгновенную скорость в каждый момент времени, то можно найти путь, пройденный автомобилем с начала движения до любого момента времени  $t$ . Но, чтобы определить положение автомобиля в данный момент времени, надо еще знать пункт, из которого он выехал. Вот это начальное положение и задает значение постоянной  $C$ .

Простейшие правила интегрирования вытекают из соответствующих правил дифференцирования:

$$\int (f(x) + \varphi(x)) dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx.$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1.$$

**Определенный интеграл.** Хотя неопределенный интеграл определен лишь с точностью до произвольной постоянной, с его помощью можно решать многие задачи физики и геометрии. Дело в том, что в большинстве таких задач надо найти не значение первообразной в какой-нибудь точке, а разность этих значений в заданных точках  $b$  и  $a$ . Но эта разность не зависит от выбора произвольной постоянной  $C$ . Например, хотя по показаниям спидометра и нельзя определить положение автомобиля в момент времени  $t$ , узнать путь, пройденный им с момента времени  $a$  до момента времени  $b$ , возможно. Причиной этого является то, что если  $\Phi(x) = F(x) + C$ , то

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Правая часть этого равенства не зависит от выбора значения  $C$ .

Поскольку разность значений первообразной в точках  $b$  и  $a$  не зависит от того, какую именно первообразную функцию для  $f(x)$  мы выбираем, ее называют *определенным интегралом* от этой функции по отрезку  $[a, b]$  и обозначают  $\int_a^b f(x) dx$ . Итак,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  — одна из первообразных для  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Разность  $F(b) - F(a)$  записывают в виде  $F(x) \Big|_a^b$ .

Например,  $x^3$  — одна из первообразных функции  $3x^2$ , и потому

$$\int_1^4 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^4 = 4^3 - 1^3 = 63.$$

С помощью определенного интеграла можно, зная мгновенную скорость в каждый момент промежутка времени  $[a, b]$ , найти перемещение точки за этот промежуток времени. В самом деле, если закон движения имеет вид  $x = f(t)$ , а мгновенная скорость в момент времени  $t$  равна  $v(t)$ , то, как мы уже знаем,  $v(t) = f'(t)$ . Но тогда  $f(t)$  — одна из первообразных для  $v(t)$ . Поскольку перемещение точки за указанный промежуток времени равно  $f(b) - f(a)$ , оно выражается как  $\int_a^b v(t) dt$ .

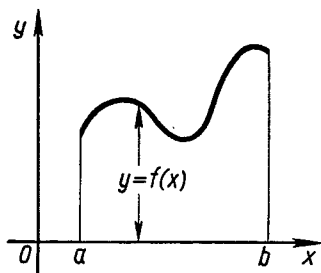


Рис. 39

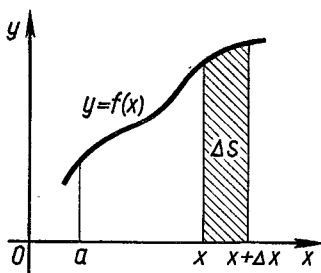


Рис. 40

Например, скорость тела при свободном падении выражается формулой  $v = gt$ . Поэтому путь, пройденный этим телом за  $t$  секунд с начала падения, выражается так:

$$s = \int_0^t gt \, dt = \left. \frac{gt^2}{2} \right|_0^t = \frac{gt^2}{2}.$$

Покажем теперь, как вывести, не прибегая к суммированию бесконечно малых, формулу для площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$  и графиком непрерывной неотрицательной функции  $y = f(x)$  (рис. 39).

Чтобы решить эту задачу, рассмотрим часть криволинейной трапеции, отсекаемую какой-либо вертикальной прямой. При перемещении этой прямой площадь отсекаемой части меняется и потому является функцией от  $x$  (абсциссы точки, через которую проходит отсекающая прямая). Обозначим эту площадь через  $S(x)$ . Мы докажем сейчас, что если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то в любой точке этого отрезка выполняется равенство  $S'(x) = f(x)$ . Это равенство (в геометрической форме) доказал учитель Ньютона английский математик Исаак Барроу, добровольно уступивший впоследствии кафедру своему гениальному ученику.

Возьмем какое-нибудь значение  $x$  и дадим ему приращение  $\Delta x$ . Тогда площадь криволинейной трапеции получит приращение  $\Delta S$  (соответствующая фигура заштрихована на рисунке 40). Это приращение заключено между числами  $m\Delta x$  и  $M\Delta x$ , где  $m$  и  $M$  — наименьшее и

наибольшее значения функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[x, x + \Delta x]$ . Поэтому

$$m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M.$$

Если теперь устремить значение  $\Delta x$  к нулю, то и  $m$  и  $M$  будут стремиться к  $f(x)$ , а тогда и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ . Это и значит, что  $S'(x) = f(x)$ .

А теперь уже не составляет труда вычислить площадь всей криволинейной трапеции. Поскольку  $S(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , то  $\int_a^b f(x) dx = S(b) - S(a)$ . Так как  $S(b)$  равно искомой площади  $S$ , а  $S(a)$  равно нулю (это площадь «части» от точки  $a$  до той же самой точки), то

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Точно так же, как формула (1), доказывается равенство

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (2)$$

для вычисления объемов. Здесь  $S(x)$  — площадь сечения, параллельного некоторой фиксированной плоскости и отстоящего от нее на расстояние  $x$  (рис. 41).

Пользуясь формулами (1) и (2), легко решить такие задачи, как нахождение площади параболического сегмента, объема пирамиды, конуса, шара, которые были столь сложны во времена Архимеда. Не составляет труда решить и кеплеровы задачи о вычислении объемов «лимона», «яблока» и других тел.

А длина дуги  $AB$ , заданной уравнением  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , вычисляется так:

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(см. с. 66).

**Возрождение дифференциала.** После работ Коши можно было подумать, что математики должны рас-

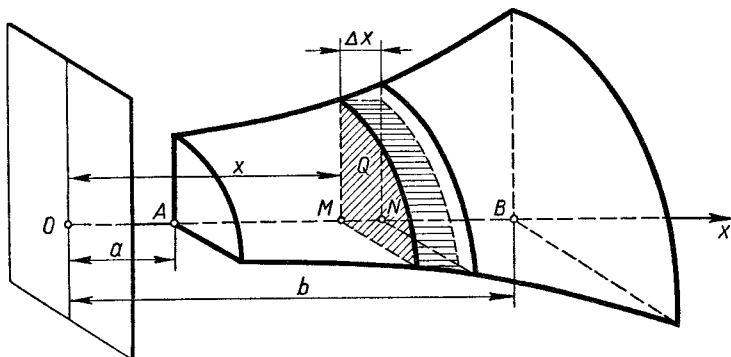


Рис. 41

статься с понятием дифференциала, так же как химики расстались с понятием флогистона, а физики — с магнитными и электрическими жидкостями и теплородом. Но случилось не так — освободившись от мистического тумана, скрывавшего его истинную суть, дифференциал занял свое место и в новой математике. Разумеется, теперь уже не было и речи о том, что он бесконечно мал. Просто оказалось, что если функция  $u=f(x)$  имеет производную, то ее приращение  $\Delta y$  (т. е. разность  $f(x+\Delta x)-f(x)$ ) можно записать так:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x,$$

где  $\alpha$  стремится к нулю, когда  $\Delta x$  стремится к нулю. Первое слагаемое, т. е.  $f'(x) \Delta x$ , и назвали *дифференциалом функции*  $y=f(x)$ , а чтобы сохранить память о временах Лейбница, вместо  $\Delta x$  стали писать  $dx$ . Получилось, что  $dy = f'(x) dx$ , а потому  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ , как и было у Лейбница.

Таким образом, теперь дифференциал стал попросту частью приращения функции, пропорциональной приращению аргумента и такой, что остальная часть приращения исчезающе мала по сравнению с дифференциалом (конечно, если дифференциал отличен от нуля). В таком виде понятие дифференциала удалось применить и к функциям многих переменных, а потом и в еще более общих случаях (например, для бесконечномерных пространств).

**Задачи на оптимизацию.** Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) в работе «Черчение географических карт» писал, что особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды. С такими задачами приходится иметь дело представителям самых разных специальностей — инженеры-технологи стремятся так организовать производство, чтобы на имеющемся станочном парке сделать как можно больше продукции, конструкторы ломают голову, стремясь сделать наилегчайшим прибор на космическом корабле, экономисты стараются так спланировать прикрепление заводов к источникам сырья, чтобы транспортные расходы оказались наименьшими.

Но не только людям приходится решать подобные задачи. Бессознательно с ними справляются и некоторые виды насекомых и других живых существ. Например, форма ячеек пчелиных сот такова, что при заданном объеме на них идет наименьшее количество воска. И хотя пчелы не изучали высшую математику, неумолимый естественный отбор привел к тому, что выжили лишь пчелы, тратившие меньше всего усилий на строительство сот.

Пчелам помогает решать свои задачи инстинкт. Человек же отличается от них тем, что ему на помощь приходит разум. Маркс говорил: «Но и самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что, прежде чем строить ячейку из воска, он уже

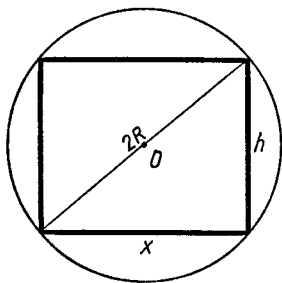


Рис. 42

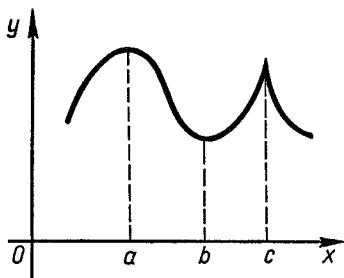


Рис. 43

построил ее в своей голове»<sup>1</sup>. Математикам удалось разработать методы решения задач на наибольшие и наименьшие значения, или, как их еще называют, задач на *оптимизацию* (от латинского «оптимум» — наилучший).

Следует различать два вида задач на оптимизацию. В задачах первого вида улучшение достигается за счет коренных качественных изменений (выбор новых конструктивных решений, переход на новую технологию изготовления данной продукции и т. д.). В задачах же второго рода качественная сторона дела остается неизменной, но меняются количественные показатели, например размеры прибора, соотношение веществ, используемых для химической реакции, начальная скорость ракеты и т. д. Мы будем заниматься лишь задачами второго рода. С математической точки зрения в этих задачах ищутся наибольшие и наименьшие значения функций, зависящих от одного или нескольких переменных.

Например, если надо вытесать из цилиндрического бревна брус наибольшего объема, то задача сводится к тому, чтобы вписать в круг данного радиуса  $R$  прямоугольник наибольшей площади (рис. 42). Если обозначить ширину прямоугольника через  $x$ , то его высота  $h$  равна  $\sqrt{4R^2 - x^2}$ , а площадь выражается следующей формулой  $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ . И теперь нам надо найти  $x$ , при котором функция  $y = x\sqrt{4R^2 - x^2}$  принимает наибольшее значение. В этой задаче исследуемая функция зависела от одного аргумента  $x$ . Если бы надо было впи-

<sup>1</sup> Маркс К. Капитал. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 23, с. 189.



сать в шар данного радиуса  $R$  прямоугольный параллелепипед наибольшего объема, то пришлось бы изучать функцию от двух переменных:  $V = xy\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$ .

**Возрастание и убывание функций. Максимумы и минимумы.** Проще всего, конечно, изучать функции от одного аргумента — чем больше аргументов, тем сложнее задача, тем труднее выбрать оптимальные значения величин. Для функций одного аргумента отыскание наибольших и наименьших значений делается с помощью дифференциального исчисления (уже в названии первой работы, опубликованной Лейбницем по дифференциальному исчислению, упоминалось о максимумах и минимумах).

На рисунке 43 изображен график некоторой функции. В точке  $a$  она принимает значение, которое больше всех соседних с ним значений (или, говоря строго, всех значений в некоторой окрестности этой точки). В точке же  $b$  значение функции меньше всех соседних значений. Говорят, что функция имеет в точке  $a$  *максимум*, а в точке  $b$  *минимум* (от латинских слов «максимум» — наибольший и «минимум» — наименьший). Оба понятия часто объединяют одним словом *экстремум* (по-латыни — крайний).

Как в точке  $a$ , так и в точке  $c$  функция, изображенная на рисунке 43, имеет максимум. Но геометрически эти точки различны — в точке  $a$  существует горизонтальная касательная к графику функции, а в точке  $c$  график имеет заострение, или, как говорят, пик, и никакой касательной провести к нему невозможно. Других точек экстремума не бывает — в любой такой точке либо касательная горизонтальна, либо ее совсем не существует.

Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Поэтому *в точках экстремума производная либо равна нулю, либо не существует*. Этот признак позволяет находить «подозрительные на экстремум» точки. Для этого достаточно найти производную данной функции и посмотреть, при каких значениях аргумента она обращается в нуль, а при каких не существует.

Любой юрист скажет, что от подозрения до доказательства виновности дистанция огромного размера и иногда подозрение в начале следствия падает на невиновного человека (во всяком случае, доктор Уотсон, вер-

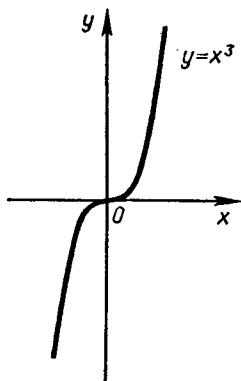


Рис. 44

ный спутник Шерлока Холмса, регулярно попадал впросак). Точно так же далеко не во всех точках, где производная равна нулю или не существует, функция имеет экстремум. Например, производная функции  $y = x^3$  равна  $3x^2$  и обращается в нуль при  $x = 0$ . Но функция  $y = x^3$  возрастает на всей числовой оси (рис. 44) и не имеет экстремума в подозрительной точке  $x = 0$ . Поэтому надо найти условие, достаточное для того, чтобы исследуемая функция была точкой экстремума.

Для этого снова обратимся к рисунку 43. Мы видим, что слева от точки  $a$  функция возрастает, а справа от нее она убывает. Поэтому в самой точке  $a$  функция принимает наибольшее значение по сравнению с соседними. Точно так же, если при переходе через некоторую точку убывание функции сменяется ее возрастанием, то эта точка является точкой минимума.

Итак, все свелось к тому, чтобы узнать, где функция возрастает, а где она убывает. И этот вопрос решается с помощью производных. Предположим, что на отрезке  $[a, b]$  функция  $y = f(t)$  имеет положительную производную. Тогда точка, движущаяся по закону  $f(t)$ , в каждый момент времени имеет положительную скорость и потому движется в положительном направлении (скажем, слева направо). Значит, если  $t_1 < t_2$ , то в момент времени  $t_2$  движущаяся точка окажется правее, чем в момент времени  $t_1$ . Иными словами, из  $t_1 < t_2$  вытекает, что  $y_1 < y_2$ , т. е. функция  $y = f(t)$  возрастает на отрезке  $[a, b]$ . Она окажется возрастающей и в случае, когда в некоторых точках отрезка  $[a, b]$  ее производная обращается в нуль — в этом случае точка, двигаясь слева направо, в некоторые моменты времени останавливается.

Точно так же доказывается, что если на отрезке  $[a, b]$  производная от функции  $y = f(t)$  отрицательна (в крайнем случае обращается в нуль в нескольких точках), то эта функция убывает на отрезке  $[a, b]$ .

Мы получили достаточное условие для того, чтобы точка  $c$  была точкой экстремума функции: если при пере-

ходе через точку  $c$  производная меняет знак с «плюса» на «минус», причем функция  $y = f(t)$  непрерывна в точке  $c$ , то  $c$  является точкой максимума для  $f(t)$ ; точно так же перемена знака производной с «минуса» на «плюс» характеризует точку минимума. Отсюда следует правило исследования функций на экстремум.

Чтобы найти точки экстремума функции, надо вычислить ее производную и найти точки, в которых производная обращается в нуль или не существует. Эти точки «подозрительны на экстремум». После этого надо найти знак производной слева и справа от каждой исследуемой точки. Если при переходе через такую точку производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в ней функция имеет максимум, если знак производной меняется с «минуса» на «плюс», то минимум, а если слева и справа от точки знаки производной одинаковы, то наше подозрение не оправдалось и в этой точке экстремума нет.

Теперь мы уже можем решать задачи на отыскание оптимальных значений. При решении таких задач надо иметь в виду, что наибольшие и наименьшие значения функции могут достигаться не только в точках экстремума, но и на концах области определения функции. Поэтому при решении задачи на оптимизацию нужно:

1) выразить оптимизируемую величину как функцию некоторой переменной и найти область определения этой функции;

2) найти точки экстремума функции;

3) вычислить значения функции в экстремальных точках и на концах промежутка, где определена функция;

4) выбрать из этих значений оптимальное.

При этом полезно иметь в виду, что точки, в которых мы ищем оптимальные значения, не изменяются при следующих операциях над функцией:

а) прибавлении постоянного слагаемого;

б) умножении на постоянный множитель (только если он отрицательный, то максимумы становятся минимумами и наоборот);

в) возведении функции в квадрат (при условии, что она неотрицательна).

Покажем на некоторых примерах, как решаются оптимизационные задачи.

**Задача Дидоны.** Легенда об основании Карфагена гласит, что когда финикийский корабль пристал к берегу, местные жители согласились продать прибывшим столько

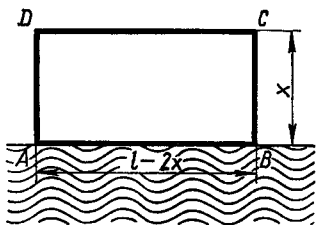


Рис. 45

земли, сколько можно огородить ее одной бычьей шкурой. Но хитрая финикийская царица Дидона разрежала эту шкуру на ремешки, связала их и огородила полученным ремнем большой участок земли, примыкавший к побережью.

Будем для простоты считать, что берег моря был прямолинейным, а участок земли имел форму прямоугольника. Тогда надо найти *прямоугольник наибольшей площади, ограниченный с одной стороны морем, а с трех других сторон ремнем заданной длины  $l$ .*

Выберем в качестве аргумента  $x$  длину отрезка  $BC$  (рис. 45). Тогда длина отрезка  $AB$  равна  $l - 2x$ , и потому площадь прямоугольника равна  $x(l - 2x)$ . Эта функция определена на отрезке  $[0, \frac{l}{2}]$  и на его концах обращается в нуль, а внутри него положительна. Значит, искомое оптимальное значение  $x$  лежит где-то внутри этой области.

Производная функции  $y = x(l - 2x)$  равна  $l - 4x$  и обращается в нуль лишь при  $x = \frac{l}{4}$ . Значит, сторона

$BC$  должна иметь длину  $\frac{l}{4}$ , а сторона  $AB$  — длину  $\frac{l}{2}$ , т. е. прямоугольник является половиной квадрата, прилегающей длинной стороной к морю. Если снять условие, что граница участка должна иметь форму прямоугольника, то можно огородить больший участок земли. Для этого он должен иметь форму полукруга.

**Оптимальная скорость.** Расходы в 1 ч на эксплуатацию корабля состоят из расходов на топливо и других расходов (содержание команды, амортизация и т. д.). Ясно, что расходы на топливо будут тем больше, чем быстрее движется судно, остальные же расходы от скорости движения не зависят. Казалось бы, что чем медленнее движется корабль, тем дешевле его эксплуатация. Но это не так, поскольку расходы надо рассчитывать не на 1 ч, а на 1 км пути. Решим следующую задачу:

*Какой должна быть скорость парохода, чтобы общая сумма расходов на 1 км пути была наименьшей, если*

расходы на топливо за 1 ч пропорциональны квадрату скорости?

Обозначим через  $S$  сумму расходов в час, а через  $v$  скорость судна. Тогда расходы на 1 км пути выразятся формулой  $\frac{S}{v}$ . Но по условию имеем  $S = kv^2 + b$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, а  $b$  — другие расходы (кроме расходов на топливо). Итак, надо найти значение  $v$ , при котором функция  $y = kv + \frac{b}{v}$  имеет наименьшее значение. Производная этой функции  $y' = k - \frac{b}{v^2}$  обращается в нуль, если  $v = \sqrt{\frac{b}{k}}$ . Таким образом, общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей при скорости  $v = \sqrt{\frac{b}{k}}$ . Значения коэффициентов  $b$  и  $k$  определяют из опыта.

**Балка наибольшей прочности.** Основным элементом любой строительной конструкции является балка. Прочность балки зависит от того, какую форму имеет ее поперечное сечение. При этом высота сечения играет значительно большую роль, чем ее ширина. Ведь гораздо труднее согнуть линейку, поставленную на ребро, чем линейку, лежащую плашмя. В сопротивлении материалов доказывают, что прочность балки с прямоугольным сечением пропорциональна ширине балки  $b$  и квадрату ее высоты  $h$ . Иными словами, прочность такой балки (измеренная в некоторых единицах) равна  $kbh^2$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от длины балки, материала, из которого она сделана, и т. д.

Деревянные балки обычно приходится вытесывать из круглых бревен. В связи с этим возникает следующая задача:

*Из бревна, имеющего радиус  $R$ , сделать балку наибольшей прочности.*

На рисунке 42 (с. 88) изображено поперечное сечение бревна. Разумеется, прочность вырезанной балки является функцией от ее ширины. При этом если взять ширину слишком большой (почти равной диаметру бревна), то получится балка очень малой высоты и прочность ее будет мала. Мала будет прочность балки, если сделать ее и слишком узкой.

Чтобы найти, при каком соотношении длины и ширины прочность будет наибольшей, выразим прочность балки как функцию от ее ширины  $x$ . Мы уже подсчитали на с. 88, что высота балки, имеющей ширину  $x$ , равна  $\sqrt{4R^2 - x^2}$ . Поэтому прочность такой балки равна  $y = kx(4R^2 - x^2)$ . При этом  $x$  изменяется от 0 до  $2R$ .

Функция  $y = kx(4R^2 - x^2)$  обращается в нуль при  $x = 0$  и  $x = 2R$  и положительна между этими значениями. Значит, она имеет максимум, лежащий между 0 и  $2R$ . Но производная этой функции  $y' = k(4R^2 - 3x^2)$  обращается в нуль на отрезке  $[0, 2R]$  лишь при  $x = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$ .

Это и есть оптимальное значение ширины  $b$  балки. Высота  $h$  балки такой ширины равна  $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$  и отношение  $\frac{h}{b}$  равно  $\sqrt{3} \approx 1,4 = \frac{7}{5}$ . Именно такое отношение высоты

вытесываемой балки к ее ширине предписывается правилами производства строительных работ.

**Прогиб балки.** Наибольший прогиб балки зависит не только от ее жесткости, но и от ее длины, распределения нагрузки, от того, заделаны ли в стену оба конца балки или только один, и т. д. Чтобы найти этот прогиб, надо знать форму упругой линии.

Возьмем балку длины  $l$ , заделаем оба ее конца в стену и положим на нее равномерно распределенную нагрузку  $Q$ . Тогда прогиб в точке, находящейся на расстоянии  $x$  от левого конца балки, выражается формулой

$$y = \frac{Q}{24EI} x^2 (l-x)^2 \quad (1)$$

(в этом легко убедиться, решая дифференциальное уравнение (2) на с. 75 при граничных условиях  $y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$ ). Отношение  $\frac{Q}{l}$  называют *интенсивностью нагрузки* и обозначают  $q$ . Чем больше интенсивность нагрузки, тем сильнее прогибается балка.

Выражение (1) является многочленом четвертой степени. График этого многочлена изображен на рисунке 46. Ясно, что самый большой прогиб балки будет в середине, т. е. при  $x = \frac{l}{2}$ ,  $y_{\max} = \frac{Ql^3}{384EI} = \frac{ql^4}{384EI}$ . Значит, если взять две балки из одного и того же материала, с одинаковой

формой сечения, но разной длины, и подвергнуть их равномерно распределенной нагрузке, имеющей одну и ту же интенсивность, то длинная балка прогнется сильнее короткой. При этом увеличение длины балки вдвое влечет за собой увеличение прогиба в 16 раз, а если увеличить длину балки в три раза, то ее прогиб увеличится в 81 раз. Если же мы будем класть на эти балки нагрузки одного и того же веса, то интенсивность нагрузки у длинной балки будет меньше, чем у короткой, но прогнется она все равно сильнее (в 8 раз, если она вдвое длиннее, и в 27 раз, если она втрое длиннее).

Балки, на которые опираются балконы, заделываются в стену лишь одним концом, второй же конец оставляют свободным. Такие балки называются *консольными*. Форма равномерно нагруженной консольной балки выражается уравнением

$$y = \frac{Q}{24EI} x^2 (x^2 - 4lx + 6l^2). \quad (2)$$

График этой кривой изображен на рисунке 47. В этом случае наибольший прогиб будет на свободном конце балки, т. е. при  $x=l$ . При этом

$$y_{\max} = \frac{Ql^3}{8EI} = \frac{ql^4}{8EI},$$

т. е. в 48 раз больше, чем у такой же балки, оба конца которой заделаны.

Чтобы сделать мост через небольшой ручей, иногда просто кладут несколько досок на бревна. В сопротив-

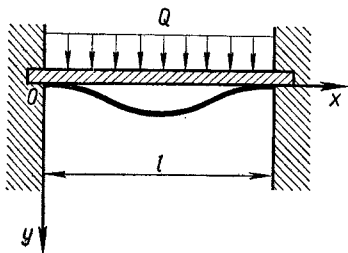


Рис. 46

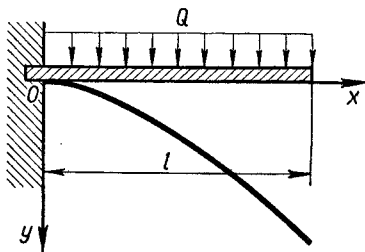


Рис. 47

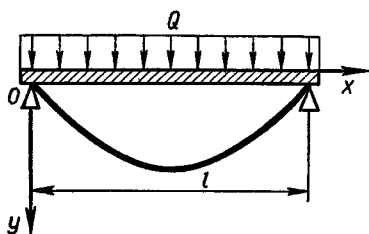


Рис. 48

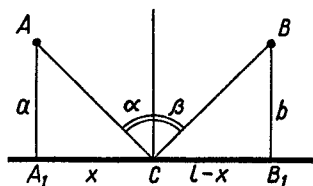


Рис. 49

лении материалов такие балки называют *опертыми на концах*. Форма опертой на обоих концах балки при равномерно распределенной нагрузке  $Q$  выражается функцией

$$y = \frac{Q}{24EI} x (x^3 - 2lx^2 + l^3) \quad (3)$$

(рис. 48). Здесь наибольший прогиб будет посередине, при  $x = \frac{l}{2}$ . Он равен  $\frac{5Ql^3}{384EI}$ , т. е. в 5 раз больше, чем у балки, заделанной на концах.

**Сосредоточенная нагрузка.** Форма изогнутой балки зависит и от того, как распределена по ней нагрузка. Возьмем балку, оба конца которой свободно лежат на опорах, а всю нагрузку соберем в одну точку — середину балки. Тогда упругая линия будет задаваться не одним, а двумя уравнениями. Для левой половины балки это уравнение имеет вид

$$y_{\text{лев}} = \frac{Q}{48EI} x (3l^2 - 4x^2), \quad (4)$$

а для правой — вид

$$y_{\text{пр}} = \frac{Q}{48EI} (l-x) (3l^2 - 4(l-x)^2). \quad (4')$$

Разумеется, при  $x = \frac{l}{2}$  обе формулы дают одно и то же значение прогиба — иначе в этой точке балка разорвалась бы. Оно равно  $\frac{Ql^3}{48EI}$  и является наибольшим значением прогиба. Так как  $\frac{1}{48} : \frac{5}{384} = 1,6$ , то сосредоточение



нагрузки в одной точке увеличило максимальный прогиб в 1,6 раза.

Если сосредоточить нагрузку  $Q$  на конце консольной балки, то уравнение ее упругой линии будет иметь вид

$$y = \frac{Q}{6EI} x^2 (3l - x). \quad (5)$$

Разумеется, в этом случае наибольший прогиб будет на конце балки. Он равен  $\frac{Ql^3}{3EI}$ , т. е. в  $\frac{8}{3}$  раза больше, чем при равномерном распределении нагрузки.

**Торопящийся луч света.** Законы отражения и преломления света применяются при расчете сложных оптических систем. Вместо того чтобы использовать эти законы в их обычной формулировке, часто используют общий принцип, из которого можно получить и закон отражения, и закон преломления света. Этот принцип формулируется следующим образом:

*Луч света, попадающий из точки  $A$  в точку  $B$ , движется по такому пути, что время, затраченное им на этот путь, экстремально (как правило, оно минимально, но можно привести примеры, когда оно оказывается максимальным).*

Выведем из этого принципа закон отражения света. Обозначим через  $x$  расстояние между проекцией  $A_1$  точки  $A$  на зеркало и точкой отражения  $C$  (рис. 49). Через  $l$  обозначим расстояние между проекциями точек  $A$  и  $B$  на зеркало, а через  $a$  и  $b$  — расстояния самих точек от зеркала. Вычисляя сумму гипотенуз треугольников  $AA_1C$  и  $BB_1C$  и деля ее на скорость света  $c$ , получаем, что время  $t$ , за которое луч света проходит между точками  $A$  и  $B$ , выражается формулой

$$t = \frac{1}{c} (\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l-x)^2}),$$

где  $c$  — скорость света.

Найдем производную полученной функции и приравняем ее нулю:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \left( \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} \right) = 0.$$

Это иррациональное уравнение не так уж легко решить, но нам этого не надо; достаточно заметить, что

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \alpha, \quad \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \sin \beta,$$

чтобы вывести из этого уравнения соотношение  $\sin \alpha = \sin \beta$ . А оно и означает, что  $\alpha = \beta$ , т. е. что угол падения равен углу отражения.

Теперь рассмотрим преломление света при переходе из среды, где свет распространяется со скоростью  $v_1$ , в среду, где он распространяется со скоростью  $v_2$ . В этом случае (рис. 50) время, затраченное светом на путь из А в В, выражается формулой  $t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2}$ . Дифференцируя эту функцию и приравнявая производную нулю, получаем условие

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{l-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (l-x)^2}},$$

т. е.

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}.$$

Это и есть закон преломления света.

В настоящее время в самых различных разделах физики встречаются законы, имеющие аналогичный характер. Они позволяют охватить целый ряд частных законов общей формулировкой, гласящей, что некоторая величина должна принять экстремальное значение.

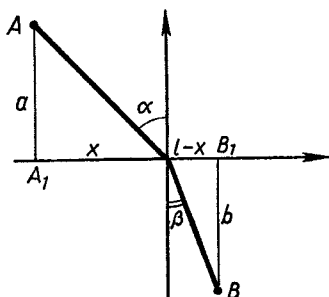


Рис. 50

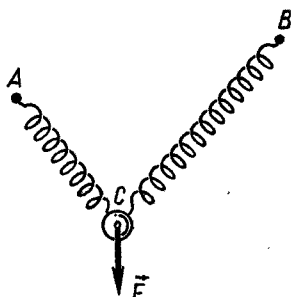


Рис. 51

**Ямы, холмы и седла.** Если пустить мяч катиться по склону котловины, он быстро скатится вниз и останется лежать на дне. В этот момент потенциальная энергия мяча будет наименьшей из возможных (при условии, конечно, что он должен находиться где-то на поверхности котловины). Вообще, любая физическая система стремится перейти в такое состояние, при котором ее потенциальная энергия минимальна (как говорят, «попасть на дно потенциальной ямы»). Этот принцип позволяет находить положение равновесия сложных систем.

Возьмем, например, шарик массы  $m$  и прикрепим его к двум точкам  $A$  и  $B$  пружинами (рис. 51). Под действием силы тяжести  $\vec{F} = m\vec{g}$  шарик начнет опускаться вниз, растягивая обе пружины. При этом потенциальная энергия шарика будет уменьшаться, а пружин — увеличиваться, но потенциальная энергия всей системы будет уменьшаться. Через некоторое время система придет в состояние равновесия — сила тяжести будет уравниваться натяжением пружин. Чтобы найти положение равновесия, достаточно поэтому найти потенциальную энергию всей системы и выяснить, когда она будет минимальной. Поскольку потенциальная энергия такой системы является функцией  $W_p(x, y)$  от координат шарика, задача свелась к отысканию минимума функции от двух переменных.

Конечно, мы могли бы взять и более сложную систему, например соединить два шарика пружиной, а потом подвесить на пружине каждый из них. Здесь уже пришлось бы искать минимум функции четырех переменных (у каждого шарика по две координаты). Число переменных возросло бы, если бы мы стали рассматривать не плоские, а пространственные системы.

Отыскивать экстремумы функций многих переменных приходится не только в механике. Инженер-химик должен искать такие значения температуры, давления, состава смеси и т. д., при которых данный химический процесс пойдет как можно быстрее и даст за данное время больше всего продукции. А агроном должен так определять сроки посева, сбора урожая, количества удобрений, чтобы при заданных затратах и заданном количестве рабочей силы и техники собрать как можно больший урожай. Иногда количество переменных, от которых зависит ответ, достигает миллионов — так обстоит дело, например, в задачах экономики, где надо составить опти-

мальный план, оперируя выпуском продукции на многих тысячах предприятий и устанавливая различные варианты распределения этой продукции.

Отыскание точек экстремума функций нескольких переменных можно свести к случаю, когда изменяется лишь одна из них. В самом деле, предположим, что точка уже находится на дне ямы. Тогда при изменении любой переменной она будет подниматься вверх по склону. Иными словами, точка минимума функции  $z=f(x_1, \dots, x_n)$  обладает следующим свойством: если закрепить значения всех переменных, кроме одной, то получившаяся функция одной переменной будет иметь минимум при том же значении этой переменной, что и вся заданная функция.

Но в точках экстремума функций одной переменной производная либо равна нулю, либо не существует. Поэтому план действий очень прост.

Сначала будем считать, что все переменные, кроме первой, «заморожены», и найдем производную получившейся функции от  $x_1$ . Такую производную называют *частной производной* по  $x_1$  и обозначают  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ . Потом таким же образом найдем частные производные по  $x_2$ , по  $x_3$ , ..., по  $x_n$ . Точками экстремума могут быть лишь точки, в которых все эти частные производные равны нулю или не существуют.

Случаи, когда производные в точках экстремума не существуют, встречаются не слишком часто (такой точкой является, например, вершина пирамиды или конуса). Чаще приходится иметь дело с «гладким экстремумом». А чтобы найти точки, где может оказаться такой экстремум, надо решить систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

При этом мы получаем ровно столько уравнений, сколько нам нужно найти неизвестных. Однако если исследуемая функция зависит от большого числа переменных, то получится система уравнений со столькими неизвестными, что ее невозможно решить, даже применяя быстродействующую вычислительную технику. Здесь возникает ситуация, названная известным американским математиком Ричардом Беллманом «проклятием размер-

ности» (функции от  $n$  переменных изображаются как функции от точек  $n$ -мерного пространства, и чем больше у нас переменных, тем выше размерность этого пространства).

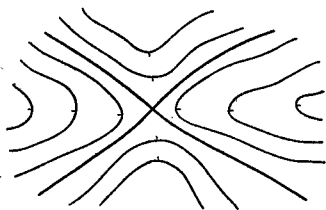


Рис. 52

Но для функций многих переменных есть еще одно осложнение. В случае функций одной переменной обращение производной в нуль, как правило, обеспечивает попадание в точку экстремума — для таких точек, как  $x = 0$  у функции  $y = x^3$ , в нуль обращается не только первая, но и вторая производная, а это бывает редко. Поэтому в случае одной переменной выбор невелик — если производная равна нулю, то у нас обычно или максимум, или минимум. Но уже для функций двух переменных разнообразие возможностей куда больше — если обе частные производные равны нулю, то мы можем оказаться не только в точках максимума или минимума (т. е. на вершине холма или на дне ямы), но и на седловине, т. е. в такой точке, что при движении из нее по некоторой линии значения функции уменьшаются, а по другой линии — увеличиваются. План такой поверхности изображен на рисунке 52. Мы надеемся, что читатель умеет разбираться в топографической карте; линии на рисунке топографы называют *горизонтальными*, а математики называют *линиями уровня*. Это линии, на которых значения функции  $z = f(x, y)$  постоянны.

**Эльбрус и Крестовый перевал.** Наивысшей точкой Кавказа является вершина Эльбруса (5633 м над уровнем моря). Но если путешественник не захочет карабкаться по горам, штурмуя отвесные стены и обходя трещины в ледниках, он может проехать с комфортом по Военно-Грузинской дороге. Только тогда он не попадет на Эльбрус — наивысшей точкой этой дороги будет Крестовый перевал, расположенный на высоте лишь 2388 м. Таким образом, наложение дополнительного ограничения (путешествовать лишь по Военно-Грузинской дороге) привело к тому, что экстремальное значение высоты оказалось меньше.

В общем случае задачу об отыскании экстремума при наличии дополнительных условий (как его называют в

математике, *условного экстремума*) можно сформулировать так: *найти экстремум функции  $z=f(x_1, \dots, x_n)$ , если*

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (1)$$

где  $m < n$ . Уравнения (1) называют *уравнениями связи* — это название пришло из теоретической механики, где такие уравнения возникают из-за того, что отдельные части системы жестко связаны друг с другом.

Чтобы решить задачу на условный экстремум, можно, конечно, сначала из уравнений связи выразить какие-нибудь  $m$  переменных через остальные  $n - m$  переменных (выразить можно ровно столько переменных, сколько у нас уравнений связи), подставить полученные выражения в исследуемую функцию, а потом решать задачу на обычный экстремум. Но получить такое выражение бывает довольно сложно. Французский математик Лагранж (1736—1813) предложил иной способ решения этой задачи. Идея его способа заключается в следующем. Пусть у нас дана функция двух переменных  $z=f(x, y)$  и одно условие  $\varphi(x, y)=0$ . Нарисуем линии уровня данной функции и линию  $\Gamma$ , задаваемую уравнением  $\varphi(x, y)=0$  (рис. 53). По рисунку видно, что, двигаясь по этой линии, мы будем подниматься до тех пор, пока не попадем в точку  $M$ , а потом начнем спуск вниз. Поскольку вершина горы находится в точке  $O$ , то, чем ближе линия уровня к этой точке, тем на большей высоте находится точка  $M$ .

Но в точке  $M$  линия  $\Gamma$  касается соответствующей линии уровня. Значит, найти точку условного экстремума все равно, что найти точку касания линии  $\Gamma$  с линией уровня. А такую задачу можно решить проще. Опуская вывод, дадим правило Лагранжа:

*Чтобы найти точку экстремума функции  $z=f(x, y)$  при условии  $\varphi(x, y)=0$ , надо составить функцию трех переменных  $z=f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)$  и найти ее экстремум.*

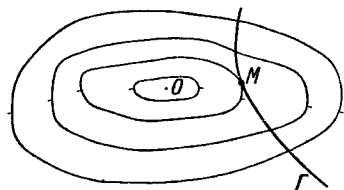


Рис. 53

### Ловля льва в пустыне.

Методы отыскания экстремума, основанные на дифференциальном исчислении, безраздельно господствовали в XVIII и XIX веках. В XX веке математики занялись более сложными задачами, в которых нельзя было

получить выражений для исследуемых функций (например, не существует формул, позволяющих узнать, сколько получится химического вещества при заданной температуре в реакторе). Поэтому стали разрабатывать новые методы поиска экстремальных значений, не использующие производных.

Итак, пусть нам надо найти максимум функции  $y=f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , причем выражение этой функции неизвестно. Конечно, если вместо выражения дан график функции, то наши дела совсем неплохи — в этом случае наибольшее значение можно указать сразу, взглянув на график. Хуже обстоит дело, если нет и графика, а мы можем лишь определять значения функции, ставя физические эксперименты, т. е. придавая  $x$  определенное значение и измеряя получившееся значение  $y$ . Если при этом каждый эксперимент требует много времени, а ответ надо дать в короткий срок, то возникает проблема об оптимизации самого процесса поиска оптимума.

Здесь надо различать два случая: либо все измерения делаются одновременно, либо одно за другим. В первом случае у нас нет ничего лучшего, чем измерить значения функции  $y=f(x)$  в каких-то точках  $x_1, \dots, x_n$  и выбрать из них наибольшее. Если функция не скачет вверх и вниз, как функция Дирихле, а меняется непрерывно и даже гладко, то много шансов за то, что найденное значение не очень отличается от искомого (разумеется, если сеть точек  $x_1, \dots, x_n$  достаточно густа).

Описанный сейчас метод весьма непочтительно называют «методом тыка» — мы тыкаем то в одно место, то в другое, надеясь попасть в точку экстремума. При этом уже найденные значения никак не учитываются при определении новых испытываемых точек. Так поступают лишь в случае, когда мы ничего не знаем об исследуемой функции, кроме общих предположений, что она непрерывна и, быть может, гладка. Но обычно мы знаем об этой функции гораздо больше. Очень часто известно, что она, во-первых, имеет на отрезке  $[a, b]$  лишь одну

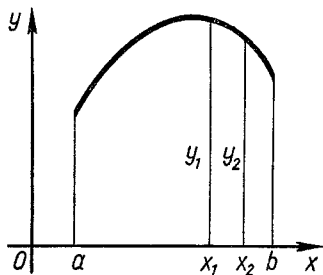


Рис. 54

точку максимума, а во-вторых, обращена выпуклостью вверх (рис. 54). В этом случае можно выбрать значительно более разумную стратегию поиска. Пусть мы знаем значения  $y_1$  и  $y_2$  нашей функции в точках  $x_1$  и  $x_2$ . Если  $y_1 > y_2$ , то в силу условий, наложенных на функцию, ее наибольшее значение лежит где-то на отрезке  $[a, x_2]$ .

Очно так же, если  $y_1 < y_2$ , то наибольшее значение лежит где-то на отрезке  $[x_1, b]$ . Неопределенность в наших поисках сузилась с числа  $b - a$  (длины отрезка  $[a, b]$ ) до наибольшего из чисел  $x_2 - a$  и  $b - x_1$ . Теперь ясно, что разумнее всего так расположить точки  $x_1$  и  $x_2$ , чтобы наибольшее из этих чисел было как можно меньше (такая стратегия называется *минимаксной*, так как мы сначала из двух чисел берем наибольшее, а потом стараемся сделать результат как можно меньшим). Но такой результат получится, если расположить эти точки около середины отрезка  $[a, b]$  возможно ближе друг к другу. Если их расстояние равно  $2\varepsilon$ , то наибольшее из чисел

$x_2 - a$  и  $b - x_1$  равно  $\frac{b-a}{2} + \varepsilon$ , т. е. при малом  $\varepsilon$  состав-

ляет примерно половину длины первоначального отрезка  $[a, b]$ . Заметим, однако, что нельзя брать  $\varepsilon$  слишком малым иначе из-за неточности измерений мы не узнаем, в какой из точек  $x_1$  и  $x_2$  значение функции больше.

Можно доказать, что добавление третьей точки не уменьшает неопределенности. Поэтому на каждом шагу надо добавлять точки парами, причем каждая новая пара состоит по возможности из близко расположенных точек, но таких, что значения функции в них все же различимы. Осталось выяснить, как располагать на отрезке  $[a, b]$  эти пары.

Среди математиков пользуется большой популярностью серия анекдотов о том, как ловить льва в пустыне (утверждают, что она ведет свое начало от веселой компании талантливых учеников Н. Н. Лузина, которую называли «Лузитанией»). По одному из таких анекдотов для поимки льва надо разбить пустыню пополам. Тогда лев, несомненно, окажется в одной из половин, так как в противном случае его не было бы во всей пустыне. Разобьем пополам эту половину, затем сделаем то же самое с той частью, где окажется лев, и будем продолжать этот процесс до тех пор, пока размер полученной части окажется сравнимым с размерами льва. Тогда лев окажется в клетке.



Применим этот процесс к «ловле» экстремума. Для этого сначала возьмем две точки около середины отрезка  $[a, b]$  и по ним определим новый отрезок неопределенности. Потом возьмем две точки около середины этого отрезка и будем продолжать этот процесс до тех пор, пока длина получившегося отрезка не станет настолько малой, что мы уже не сможем различить, на каком из его концов функция больше, а на каком меньше. Это и даст искомое экстремальное значение функции с наилучшей возможной точностью.

**Путем талой воды.** Отыскивать экстремумы с помощью деления области на части можно не только для функций одной переменной, но и для функций двух или трех переменных. Тут уже возникают осложнения, которые быстро нарастают по мере увеличения числа переменных, от которых зависит функция. Пусть функция зависит от ста переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ , причем  $x_k$  изменяется на отрезке  $[a_k, b_k]$ . Тогда если мы разделим пополам каждый из этих отрезков и возьмем лишь точки, координатами которых являются или концы, или середины наших отрезков, то получится  $3^{100}$ , т. е. примерно  $10^{43}$  точек. Число операций, которые может сделать в секунду самая быстродействующая вычислительная машина, имеет порядок  $10^{10}$ . Поэтому даже миллион таких машин не просмотрят за секунду более  $10^{16}$  точек. Это значит, что для просмотра всех точек понадобится  $10^{27}$  с, т. е.  $3 \cdot 10^{20}$  лет, что во много раз больше, чем по современным гипотезам существует наша Вселенная. Даже если удастся сделать машины с еще большим быстродействием, полный перебор всех точек никогда не удастся окончить. Надеемся, читатель теперь понял, что имел в виду Беллман, говоря о «проклятии размерности».

Из сказанного не следует делать пессимистического вывода, что математика не может справиться с отысканием экстремумов для функций большого числа переменных. Просто надо заменить «метод тыка» на что-нибудь более осмысленное, например учитывать не только значения функций, но и направление их изменения, и по возможности сводить многомерные задачи к одномерным.

Один из способов такого сведения заключается в том, что на первом шагу меняют лишь одну из переменных и за счет этого стараются получить наибольшее

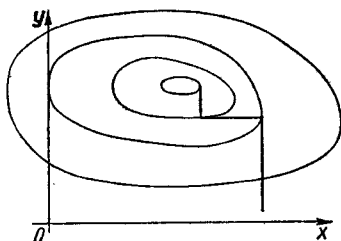


Рис. 55

значение функции (будем сейчас искать максимум). После этого оставляют неизменным найденное значение первой переменной и меняют вторую. Потом придет очередь третьей, четвертой и т. д., пока каждая из переменных не сыграет своей роли. После этого снова меняют первую переменную, за-

тем вторую и т. д., пока не закончится второй цикл. Если повезет, то через несколько циклов попадают в область больших значений функции и, быть может, окажутся недалеко от одной из вершин (рис. 55).

Такой процесс последовательных приближений к искомой точке экстремума хорошо описан в стихотворении датского ученого Пита Хейна (он называет свои стихи «груками»):

«Дорогу к истине трудно сыскать,  
Иди же в путь и не мешкай.  
Промах, промах,  
И промах опять.  
Но меньше,  
И меньше,  
И меньше».

Иногда такой путь приближений оказывается слишком длинным. Бывает, что его можно сократить, двигаясь наискосок. Но из каждой точки ведет много направлений, и возникает вопрос, какое же из них выбрать. Если мы взбираемся на холм и можем двигаться с одной и той же скоростью, несмотря на крутизну холма, то ответ ясен — выгоднейшим окажется путь, который в каждой точке идет круче всего — тогда не придется зря тратить время на обходные маневры. Впрочем, этот путь будет виден сразу — по нему весною текли талые воды, скатываясь в каждый момент времени по самому крутому направлению вниз.

К сожалению, если функция задана формулой или, хуже того, лишь правилом отыскания ее значений путем эксперимента, то талые воды не помогут. Но если найти несколько значений функции около данной точки, они позволят нам представить себе, как функция меняется

в этой окрестности, и найти направление наибольшей крутизны, или, как говорят математики, направление *градиента*. В случае функции двух переменных оно перпендикулярно касательной к линии уровня (рис. 56). После того как нужное направление движения найдено, мы вместо функции многих переменных получаем функцию одной переменной, а именно расстояния от исходной точки при движении по этому направлению. Если эта функция принимает наибольшее значение в точке  $M_1$ , то надо найти направление градиента в этой точке и пойти по новому пути. Двигаясь таким образом, можно оказаться около вершины холма. Поскольку на каждом шагу путь идет в направлении наибольшей крутизны, этот метод называют *методом наискорейшего подъема* (или *наискорейшего спуска*, в зависимости от того, ищут наибольшее или наименьшее значение функции).

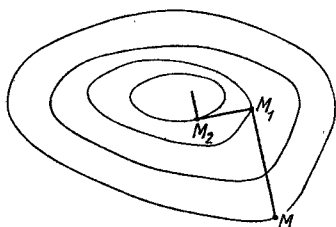


Рис. 56

Однако и этот метод не всегда приводит к цели. Если точка максимума лежит на узком гребне горы, то после того, как мы заберемся на этот гребень, дальнейший путь будет состоять из метаний, направленных поперек этого гребня, причем они не будут приближать нас к вершине. Кроме того, если даже и забраться на вершину, то заранее не известно — настоящая эта вершина или маленький пригорок — иначе, взобравшись на Машук, можно подумать, что под нами весь Кавказский хребет.

Чтобы обойти эти трудности, знаменитый советский математик, академик И. М. Гельфанд (род. в 1913 г.) и его безвременно скончавшийся ученик М. Л. Цетлин (1924—1966) придумали метод, который называли «методом оврагов» (они искали не максимум, а минимум, и потому вместо гребня горы получили овраги).

Суть этого метода заключается в том, что сначала берут какую-нибудь точку и идут из нее методом наискорейшего спуска, пока не начнут метания из стороны в сторону (это будет видно из того, что минимизируемая функция почти перестанет уменьшаться). Такое поведение функции означает, что мы находимся где-то на дне оврага. Теперь возьмем совсем другую точку и снова

спустимся из нее на дно оврага. Итак, мы нашли две точки на этом дне. А теперь пойдем по направлению от одной из найденных точек к другой и сделаем большой шаг в этом направлении (он в несколько раз больше, чем шаги, делаемые при спуске в овраг). Разумеется, поскольку овраг может повернуть в другую сторону, то не исключено, что получится подъем со дна оврага на его склон. Ну, что же, тогда надо из найденной точки снова спуститься вниз и вновь сделать шаг по дну оврага.

Основная трудность в применении этого метода — правильно сортировать величины шагов вниз и по дну оврага. Но если хорошо подобрать эти величины, то получится путь, который, как говорят авторы этого метода, будет «переваливать через небольшие хребты и огибать высокие горы». А главное, попав в неглубокую яму, мы не застрянем в ней, а выберемся на путь, ведущий в искомую точку минимума. Конечно, и метод оврагов — не панацея, и он в некоторых случаях дает результаты, не лучшие, чем градиентные методы или даже метод слепого поиска. Но часто этот метод дает заметный выигрыш.

**Задачи с ограничениями.** Когда мы путешествовали в предыдущем пункте по горам и оврагам, то считали, что из каждой точки открыт путь во все стороны. Так бывает не всегда. Может случиться, что где-то в горах находится участок, доступ на который посторонним воспрещен, или что где-то нашу дорогу пересекает государственная граница. Тогда возникают задачи на оптимум с ограничениями.

Решение таких задач во многом отличается от решения задач без ограничений, так как экстремальные значения могут достигаться не внутри области, а где-нибудь на ее границе. Поэтому, кроме поведения самой функции, в таких задачах существенна форма области, в которой могут меняться переменные. Обычно область изменения переменных задается системой неравенств:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Поэтому задача оптимизации с ограничениями ставится так: *среди значений переменных, удовлетворяю-*

щих неравенствам (1), найти те, при которых данная функция  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  принимает наибольшее или наименьшее значение.

Обычно такие задачи можно решать лишь при некоторых предположениях как о самой функции  $z$ , так и о функциях, задающих вид области  $\Omega$ . Самым первым видом таких задач были задачи на линейное программирование, впервые решенные советским ученым Л. В. Канторовичем и несколько позднее американскими учеными Купмансом и Данцигом. В 1965 году академик Канторович был удостоен Ленинской премии, а в 1975 году Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию. В задачах линейного программирования и исследуемая функция, и функции, задающие ограничения, линейны, т. е. имеют первую степень по всем переменным.

Если число независимых переменных равно двум или трем, задачи линейного программирования допускают простое геометрическое истолкование — в них надо найти экстремальное значение функции в конечном числе точек, а именно в вершинах некоторого выпуклого многоугольника или многогранника. В случае же, когда исследуемая функция и ограничения зависят от большого числа переменных, приходится использовать геометрические представления в многомерных пространствах. Здесь приходится искать наибольшее или наименьшее из значений функции в вершинах многомерного многогранника.

Для решения этой задачи Данциг разработал особый алгоритм, называемый сейчас *симплекс-методом* (впервые он был опробован на примере пирамиды в  $n$ -мерном пространстве, имеющей  $n+1$  вершину, а такие пирамиды называют *симплексами*; например, отрезок — это одномерный симплекс, а треугольник — двумерный). С помощью симплекс-метода можно, найдя какую-нибудь из вершин многогранника, идти по его вершинам, все время улучшая значение функции, пока не попадем в точку, где оно оптимально.

Линейное программирование сейчас применяется в самых различных областях: для составления наиболее выгодных рационов в животноводстве, для составления наиболее удачных расписаний, для распределения работ между станками и т. д.

Хотя область приложений линейного программирования и весьма обширна, существуют задачи, для решения которых нужны еще более мощные методы.

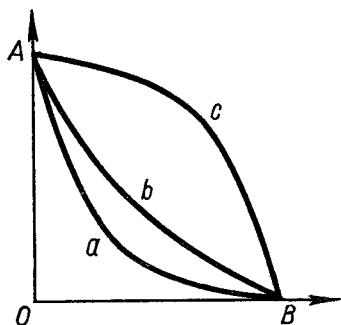


Рис. 57

**Льва узнают по когтям.** Возьмем две точки  $A$  и  $B$  и соединим их всевозможными кривыми, идущими сверху вниз (рис. 57). Если материальная точка начнет падать из точки  $A$  по одной из этих кривых, то через некоторое время  $t$  она попадет в точку  $B$ . Это время можно рассматривать как функцию, заданную на множестве всех кривых, идущих из точки  $A$  в точку  $B$  в указанном на-

правлении. Если кривая сначала круто падает вниз, а потом полого идет до точки  $B$  (кривая  $a$ ), то движущаяся точка сначала будет падать быстро, а потом медленно. Если же она круто падает лишь в самом конце (кривая  $c$ ), то точка потеряет много времени на начальном отрезке пути. Возникает задача об отыскании такой кривой, что, двигаясь по ней, падающая точка быстрее всего попадет в точку  $B$ .

История этой задачи начинается с 1696 года, когда Иоганн Бернулли доказал, что искомой кривой (ее называли *брахистохроной* от греческих слов «брахистос» — кратчайший и «хронос» — время) является наша старая знакомая — циклоида. Он предложил Лейбницу попробовать самостоятельно найти решение. Тот сразу нашел ответ и посоветовал Бернулли опубликовать «столь прекрасную и до сих пор неслыханную задачу» для состязания между геометрами, предоставив годичный срок для решения. Позднее Лейбниц высказал в одной заметке мнение, что во всем мире есть лишь три математика, которые смогут с ней справиться (Лопиталь, Гудде и Ньютон). И хотя один малоизвестный математик горько жаловался, что Лейбниц не назвал и его, все же прогноз оказался верным — поступило лишь три решения, одно из которых принадлежало Лопиталю (1661—1704), второе — Якобу Бернулли (1654—1705), а третье было опубликовано без подписи в одном английском журнале. Но Иоганн Бернулли сразу угадал анонима — лишь один человек в Англии мог решить задачу с таким блеском. Читатель, конечно, догадался, что им был Исаак Ньютон, который в те годы уже отошел от математиче-

ских исследований и стал хранителем монетного двора. Как писал сам Бернулли, он узнал Ньютона, как льва узнают по когтям.

И действительно, задача стоила того, чтобы ее решали величайшие математики. Ведь в ней речь шла не об экстремумах функций нескольких переменных, а о функциях, у которых аргументом служили кривые линии. Самым замечательным оказалось решение, предложенное Якобом Бернулли. Он сформулировал принцип, который и потом часто позволял решать задачи подобного рода: *если какая-нибудь кривая обладает свойством максимума или минимума, то каждая ее бесконечно малая часть обладает тем же свойством.*

Среди задач, которые можно было решать новыми методами, была и такая: *найти замкнутую кривую заданной длины  $l$ , ограничивающую наибольшую площадь.* Угадать ответ было нетрудно, поскольку знали, что среди  $n$ -угольников требуемым свойством обладает правильный  $n$ -угольник, причем с ростом  $n$  площадь возрастает. Поэтому естественно было ожидать, что искомой кривой является окружность. Читатель может найти элементарное доказательство этого утверждения в книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры».

Много задач на нахождение кривых линий, обладающих свойствами максимума и минимума, решил Леонард Эйлер, опубликовавший по этим вопросам специальную книгу. В ней он показал, как связаны эти вопросы с отысканием формы упругих стержней и пластинок. Ведь форма изгиба будет устойчива, если потенциальная энергия системы окажется минимальной. Поэтому достаточно выразить потенциальную энергию изогнутого упругого тела, чтобы свести задачу к отысканию кривых или поверхностей, имеющих какое-то минимальное свойство.

И в геометрии новое исчисление оказалось весьма полезным. После того как вывели формулу для длины пространственной кривой, возникла задача: *найти кратчайшую среди всех кривых, соединяющих две точки  $A$  и  $B$  поверхности и лежащих на этой поверхности.* Например, на плоскости такой линией будет отрезок  $AB$ , а на сфере — дуга диаметрального сечения<sup>1</sup>, соединяющая

---

<sup>1</sup> Диаметральным сечением называется пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр, например меридианы и экватор.

точки *A* и *B*. Для поверхностей же более сложных (например, для эллипсоида вращения) решение задачи не было известно. А такие кратчайшие линии были нужны картографам и геодезистам, не зря их сейчас называют *геодезическими линиями* на поверхности. Интересный результат о геодезических линиях на поверхностях вращения получил французский геометр Алексис Клеро. Он доказал в 1729 году, что вдоль таких геодезических произведение расстояния от оси вращения на косинус угла между геодезической и параллелью остается постоянным.

Замечательно, что этот результат принадлежал не маститому ученому, а шестнадцатилетнему юноше. Через два года Клеро был избран членом Парижской Академии наук — случай, беспрецедентный в ее истории. К этому времени он уже шесть лет занимался математическими исследованиями — первые результаты Клеро получил в двенадцать с половиной лет, и парижские академики поверили в авторство мальчика лишь после того, как он успешно ответил на все поставленные вопросы.

Общий метод решения задач на экстремальные свойства кривых линий разработал Лагранж. Он ввел для таких задач аналог понятия дифференциала и назвал его *вариацией* — кривую немного изменяют (варьируют) около какой-нибудь точки и смотрят, на сколько изменится исследуемая величина, зависящая от этой кривой. Если кривая обладает искомым экстремальным свойством, то ее вариации обращаются в нуль, так же как обращается в нуль дифференциал в точках экстремума функции. Метод Лагранжа называли *вариационным исчислением*. Уравнения, к которым приводит это исчисление, обычно довольно сложны, и поэтому они всегда были камнем преткновения для студентов. По этому поводу вспоминается история, рассказанная академиком Алексеем Николаевичем Крыловым (1863—1945).

В начале 20-х годов флот нашей Родины был в тяжелом состоянии после нескольких лет войны, и поэтому пришлось закупать корабли за границей. Крылов входил в комиссию, руководившую этими закупками. Однажды ему пришлось рассматривать вопрос о размещении заказов иностранным фирмам на постройку нескольких танкеров — нефтеналивных судов. Изучив предложения, сделанные немецкой и французской фирмами, он заметил, что французский предприниматель не согла-



совал данные и поэтому, чтобы выполнить условия, будет вынужден сделать корабль грузоподъемностью на 1200 т больше, чем предполагалось.

После того как договор с французской фирмой был заключен, между А. Н. Крыловым и главным инженером фирмы Роже произошел такой разговор:

— Обязуется ли фирма выполнить все технические условия, указанные в ее письме? — спросил Алексей Николаевич.

— Само собой разумеется, — отвечал Роже.

— Почему же придали кораблю такие размеры, при которых у него будет при полной нагрузке в 10 000 т метацентрическая высота по крайней мере 2,30 м, а не 1,20 м, как по договору?

— Ваша фамилия Крылов, имеете ли вы какое-либо отношение к тому Крылову, теорию качки которого нам приходилось изучать в Кораблестроительном институте после окончания Политехнической школы?<sup>1</sup>

— Это я сам.

— В таком случае я не спору, у вас, наверное, все подготовлено, сообщите, какие надо внести изменения в вариант.

Крылов показал тетрадь, где было подготовлено несколько вариантов, и предложил выбрать любой из них. Роже думал три дня и, встретившись вновь с Крыловым, сказал:

— Но при любом варианте получается избыток грузоподъемности около 1200 т.

— Я его не требую, мне надо 1,20 м метацентрической высоты. Я ни на одном из этих вариантов не настаиваю, делайте иначе, тогда я, может быть, получу избыток грузоподъемности еще больше. Здесь вы имеете своеобразное применение вариационного исчисления, которое вам читали в Политехнической школе.

— Да, но мы никогда не могли его понять, — грустно протянул Роже.

Так глубокие математические знания в сочетании с блестящим владением теорией корабля позволили Крылову сэкономить большую сумму денег для нашей страны.

Своеобразные вариационные задачи возникают при изучении процессов управления. Здесь может идти речь

---

<sup>1</sup> Политехническая школа — главное учебное заведение Франции, готовящее инженеров.

об управлении самолетами, ракетами, экономическими системами и т. д. Во многих случаях бывает необходимо перевести управляемую систему из одного состояния в другое. Например, состояние космического корабля определяется его положением в пространстве и вектором скорости. Если нужно совершить стыковку с другим космическим кораблем, включают бортовые ракеты, которые производят изменение положения и скорости корабля. Это изменение можно получить различными способами. Возникает задача, как осуществить его либо в кратчайший срок, либо с наименьшим расходом топлива. Такие экстремальные задачи теории управления изучали замечательный советский математик академик Л. С. Понтрягин (род. в 1908 г.) и его ученики член-корр. АПН СССР В. Г. Болтянский (род. в 1925 г.), действительный член АН Груз. ССР Г. В. Гамкредидзе (род. в 1926 г.) и академик Е. Ф. Мищенко (род. в 1922 г.). Для решения подобных задач Л. С. Понтрягин разработал особый метод решения, получивший название «принцип максимума Понтрягина». За это достижение упомянутая группа ученых в 1962 году была удостоена Ленинской премии.

Еще более сложные задачи оптимизации возникают, когда значение оптимизируемой величины зависит от решений двух или более участников, имеющих, быть может, противоположные интересы. Такая ситуация возникает во многих играх, и потому раздел математики, изучающий соответствующие задачи, называют *теорией игр*. Разумеется, математики занимаются теорией игр не для того, чтобы давать советы о наилучшей стратегии при играх в домино, карты и т. д. Игрой в указанном смысле слова является и экономическое поведение двух конкурирующих фирм, и военное сражение, и многое иное. Поэтому поток работ по теории игр возрастает с каждым днем. Сначала изучались игры с конечными множествами стратегий (матричные игры), но сейчас в центре внимания ученых оказались *дифференциальные игры*, для изучения которых нужен аппарат математического анализа.

## ЗАКОНЫ ОРГАНИЧЕСКОГО РОСТА И ВЫРАВНИВАНИЯ

**Стремительное размножение.** Поразительна быстрота, с которой размножаются животные и растения, если они попадают в благоприятные условия, т. е. почти не имеют естественных врагов и находят вдоволь пищи. Достаточно было выпустить в Австралии на волю пару кроликов (раньше они там не водились), чтобы через некоторое время их потомство стало национальным бедствием. А когда один южноамериканский ученый выпустил несколько экземпляров выведенного им гибрида африканских и местных пчел, рои новой породы стали занимать одну территорию за другой, распространились почти по всей Южной Америке и сейчас почти полностью вытеснили ранее существовавшие там виды пчел.

Чтобы понять, почему так быстро растет число находящихся в благоприятных условиях живых существ, сделаем некоторые расчеты. Одна пара кроликов дает за год приплод в 50 крольчат. Если бы все они оставались в живых, то в грубом приближении можно было бы считать, что число кроликов увеличивается в 25 раз каждый год (при более точном подсчете надо учитывать продолжительность жизни кроликов и возраст, когда они становятся способными к воспроизведению). Но тогда через два года их число увеличивается в 625 раз, через 3 года в 15 625 раз и т. д. Последовательность чисел 1, 25, 625, 15 625, ... возрастает очень быстро — уже через 5 лет было бы  $25^5$ , т. е. более девяти миллионов пар, а еще через пять лет кролики исчислялись бы биллионами. Еще быстрее увеличивалось бы количество растений мака, если бы каждое маковое зерно давало новое растение. В одной головке содержится примерно 3000 ма-

ковых зерен, и уже через 5 лет число потомков одного растения равнялось бы  $3000^5 = 243\,000\,000\,000\,000\,000$  — это примерно по 2000 растений на каждый метр суши, включая песчаные пустыни Сахары и Каракумов и ледяные просторы Гренландии и Антарктиды. А комнатные мухи размножались бы вообще с головокружительной быстротой. Если считать, что муха откладывает по 200 яиц и в течение лета появляется 7 поколений, то за лето появилось бы более чем 800 000 000 000 000 мух. Эти мухи весили бы несколько десятков миллионов тонн, а выстроенные в одну линию, заняли бы отрезок длиной в 1500 млн. км, что в 10 раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца. Потомство одной пары мух за два года имело бы массу, превышающую массу земного шара.

Разумеется, в действительности мы не наблюдаем такого чудовищного роста — в любом сообществе животных и растений (или, говоря ученым языком, биогеоценозе) через некоторое время устанавливается динамическое равновесие и увеличение численности какого-нибудь вида приводит, с одной стороны, к уменьшению запасов пищи, приходящихся на одну особь, а с другой — к размножению других видов, питающихся представителями данного вида. Поэтому через некоторое время все снова приходит в равновесие. И лишь в случае, когда в уже установившееся сообщество включается новый член, не имеющий в нем врагов (в Австралии, например, практически отсутствовали крупные хищные животные, которые могли бы охотиться на кроликов), пришельцы могут весьма быстро размножаться.

**Геометрическая прогрессия.** Числа 1, 25, 625, 15 625, ..., получившиеся, когда мы стали подсчитывать число пар кроликов, образуют последовательность, в которой каждый следующий член в 25 раз больше предыдущего. Такие последовательности называют *геометрическими прогрессиями*, а число, показывающее, во сколько раз каждый следующий член больше предыдущего, называют *знаменателем прогрессии* или (в биологии и физике) *коэффициентом размножения*.

В математических текстах геометрическая прогрессия впервые встречается в написанном более 4000 лет тому назад египетском папирусе, где приведена такая задача:

«Лестница дом	7
кошка	49
мышь	343
ячмень	2401
мера	16 807 вместе 19 607»

По-видимому, она читалась следующим образом: «В 7 домах живет по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь поедает по 7 колосьев ячменя, каждый колос дает при посеве урожай в 7 мер хлеба. Сколько всего предметов?». И хотя эта задача не имела практического смысла (зачем, в самом деле, складывать дома с мышами, а кошек с ячменем?), количество мер ячменя, спасенных всего 49 кошками, объясняет, почему сразу после приручения кошка стала считаться у египтян священным животным, за убийство которого полагалась смертная казнь.

Любопытно, что в книгах, написанных несколько тысяч лет спустя, встречаются похожие задачи с тем же «священным» числом 7. Например, в книге «Liber Abaci», написанной Леонардо Пизанским в начале XIII века, речь идет о 7 старухах, идущих в Рим, причем каждая из них ведет по 7 мулов, на каждом муле висит по 7 мешков, в каждом мешке лежит по 7 хлебов, в каждый хлеб воткнуто по 7 ножей, а каждый нож имеет 7 ножен, и снова надо сосчитать общее число предметов.

Быстрый рост членов геометрической прогрессии, знаменатель которой больше, чем 1, был замечен очень давно. Популярная легенда о награде за изобретение шахмат, впервые встречающаяся в XI веке н. э. в книге арабского ученого Аль-Бируни, гласит, что за первую клетку шахматной доски изобретатель потребовал от царя одно пшеничное зерно, за вторую — два зерна, за третью — 4 зерна, за четвертую — 8 зерен и т. д. Чтобы найти, сколько он потребовал пшеницы, надо сложить члены геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, ...,  $2^{63}$ . Эта сумма равна  $2^{64} - 1$ , т. е. 18 446 744 073 709 551 615. Если даже засеять пшеницей всю сушу, не удастся собрать столько зерна. Чтобы вместить такой урожай, понадобился бы амбар объемом в  $12\,000\text{ км}^3$ . При высоте в 4 м от занял бы площадь в  $3\,000\,000\text{ км}^2$ , т. е. примерно седьмую часть площади СССР.

**От сложных процентов до показательной функции.** Еще в древнем мире было широко распространено рос-

товщество — отдача денег взаймы под проценты. Крестьянин, которого постиг неурожай, ремесленник, имущество которого уничтожил пожар, разоривший мелкий торговец были вынуждены идти к ростовщику, обещая вернуть на следующий год сумму, значительно большую, чем взятая в долг. Например, в Древнем Вавилоне ростовщики брали по 20% лихвы в год. При этом если должник не мог возратить долг на следующий год, ему надо было платить проценты не только с занятого капитала, но и с выросших за год процентов. Поэтому через два года приходилось уплачивать не 40%, а 44% лихвы, так как  $1,2^2 = 1,44$ . За пять лет сумма долга увеличивалась в  $1,2^5$  раз, т. е. почти в 2,5 раза, а за 10 лет — более чем в 6 раз. Понятно, что большинство должников оказывались несостоятельными и, давно выплатив основную сумму долга, были вынуждены всю жизнь работать на то, чтобы платить все возрастающие проценты. В конце концов несостоятельные должники становились рабами хищного займодавца.

В XIV—XV веках в Западной Европе появляются банки — учреждения, которые давали деньги в рост князьям и купцам, финансировали за большие проценты дальние путешествия и завоевательные походы. Чтобы облегчить расчеты сложных процентов, взимаемых по займам, составили таблицы, по которым сразу можно было узнать, какую сумму надо уплатить через  $n$  лет, если была взята взаймы сумма  $a$  по  $p\%$  годовых. Легко подсчитать, что уплачиваемая сумма в этом случае выражается формулой

$$s = a \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

Если  $p$  постоянно, то  $\left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n$  является функцией от  $n$ , причем  $n$  стоит в показателе. Иными словами, такие таблицы давали значения показательной функции при различных значениях основания (различных значениях  $1 + \frac{p}{100}$ ) и натуральных значениях  $n$ .

Последнее ограничение было не слишком удобно, иногда деньги брались в долг не на целое число лет, а например, на 2 года 6 месяцев. Чтобы не усложнять дело, можно пользоваться линейной интерполяцией, т. е.

брать среднее арифметическое сумм долга за 2 года и за 3 года. Однако это дает лишь приближенное решение задачи. Чтобы решить ее точнее, надо исходить из следующих соображений: если через 2,5 года сумма  $a$  обратится в  $aq$ , то через следующие 2,5 года она увеличится еще в  $q$  раз и станет равной  $aq^2$ . Но через 5 лет сумма  $a$  должна обратиться в  $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5$ . Поэтому  $q^2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5$  и, значит,  $q = \sqrt{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5}$ . Так как сум-  
му долга через 2,5 года естественно обозначить  $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{2,5}$ ,  
то придем к равенству  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{2,5} = \sqrt{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5}$ .

Аналогичные рассуждения показывают, что вообще надо  
положить  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m}$ .

Так возникла идея степени с дробным показателем. Следует отметить, что Архимед в одной из своих работ считал отношение объемов двух шаров полуторным для отношения их поверхностей. Это означало не то, что одно отношение в полтора раза больше другого, а то, что одно получается из другого возведением в степень  $\frac{3}{2}$ :

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Но идея Архимеда не была понята его современниками. Лишь через полтора тысячелетия Оресм стал рассматривать возведение чисел в степени с дробными показателями и распространил на такие степени правила, которые ранее были известны лишь для натуральных показателей. А живший через сто лет после него французский математик Шюке решал такую задачу: *в сосуде имеется отверстие, через которое за сутки вытекает  $\frac{1}{10}$  его содержимого. За сколько времени вытечет половина воды?*

Эта задача сводится к уравнению  $\left(\frac{9}{10}\right)^x = \frac{1}{2}$ , решением которого является иррациональное число. Так

как во времена Шюке иррациональных чисел не знали, то Шюке ограничился отысканием приближенного значения показателя  $6 \frac{31441}{531441}$ .

Рассматривая таблицы степеней, Оресм и Шюке, а также живший в XVI веке немецкий математик Михаил Штифель (1486—1567) заметили, что при умножении чисел показатели складываются. Дальнейшее развитие этого наблюдения привело к созданию таблиц логарифмов и антилогарифмов, т. е. к рассмотрению показательной функции для достаточно густой сетки значений аргумента. Оставался лишь один шаг, чтобы ввести степени с любым действительным показателем. Этот шаг сделал в конце XVII века Исаак Ньютон. После этого Иоганн Бернулли рассмотрел степени с переменным действительным показателем, т. е. ввел *показательную функцию*.

**Радиоактивный распад.** Показательная функция  $y = a^x$  встречается в самых различных областях науки — в физике, химии, биологии, экономике. Рассмотрим одно из важнейших физических явлений, описание которого связано с этой функцией, радиоактивный распад. После открытия радиоактивности в опытах Беккереля и супругов Кюри возник вопрос, по какому закону происходит распад атомов. Оказалось, что количество распадающегося за единицу времени вещества всегда пропорционально имевшемуся количеству вещества. Иными словами, за данный промежуток времени всегда распадается одна и та же доля наличного запаса атомов.

Физики называли промежуток времени, в течение которого распадается половина всех имеющихся атомов, *периодом полураспада* данного вещества. Этот период различен для разных веществ: для урана-238 он равен 4,5 млрд. лет, для радия 1620 лет, а для полония-84 период полураспада равен всего  $1,5 \cdot 10^{-4}$  с.

Если период полураспада данного вещества равен  $T$ , то через промежуток времени  $nT$  остается  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ -я доля этого вещества. Иными словами, если вначале количество вещества равнялось  $M$ , то через промежуток времени  $t = nT$  его останется  $\frac{M}{2^n}$ , т. е.  $M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ . Формула

$$m = M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad (1)$$



верна не только для значений  $t$ , кратных  $T$ , но и для любых значений  $t$  — дробных и иррациональных, положительных и отрицательных (отрицательные значения  $t$  означают, что мы ищем количество вещества за некоторое время до начала наблюдения).

Из формулы (1) вытекает, что за 1 620 000 лет, т. е. за тысячу периодов полураспада радия, его количество уменьшается в  $2^{1000}$  раз, т. е. более чем в  $10^{300}$  раз (полезно помнить, что  $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$ ). Если бы даже вся наша Галактика состояла из атомов радия, то их число все равно было бы неизмеримо меньше, чем  $10^{300}$ , и потому за 1 620 000 лет весь радий распался бы. Не следует делать из сказанного вывод, что Галактика существует меньше полутора миллионов лет — время ее существования исчисляется миллиардами лет. Дело в том, что радий все время появляется в ходе распада урана-238, а за все время существования Земли количество урана уменьшилось всего в два раза.

**Один человек удерживает корабль.** В романе Жюль Верна «Матис Шандор» силач Матифу совершил много подвигов, среди которых есть такой.

Готовился спуск на воду трабоколо<sup>1</sup>. Когда уже начали выбивать из-под киля клинья, удерживавшие трабоколо на спусковой дорожке, в гавань влетела нарядная яхта. Спускавшееся судно неминуемо должно было врезаться в борт плывущей верфи яхты.

«Вдруг из толпы зрителей выскакивает какой-то человек. Он хватается за трос, висящий на носу трабоколо. Но тщетно старается он, упираясь в землю ногами, удержать трос в руках... Поблизости врыта в землю швартовая пушка. В мгновение ока неизвестный набрасывает на нее трос, который начинает медленно разматываться, а храбрец, рискуя попасть под него и быть раздавленным, сдерживает его с нечеловеческой силой. Это длится секунд десять. Наконец, трос лопнул. Но этих десяти секунд оказалось достаточно. Трабоколо... прошло за кормой яхты на расстоянии не более фута... Яхта была спасена».

Читатель, конечно, догадался, что неизвестным, спасшим яхту, был силач Матифу. Но нужна ли была его нечеловеческая сила, чтобы удержать корабль?

---

<sup>1</sup> *Трабоколо* — небольшой корабль с парусами трапециевидной формы.

Посмотрим, как происходит швартовка корабля: с парохода на пристань бросают канат, на конце которого сделана широкая петля. Человек, стоящий на пристани, надевает петлю на причальную тумбу, а матрос на корабле укладывает канат между кнехтами — небольшими тумбами, укрепленными на борту судна. Сила трения между канатом и кнехтами и останавливает судно. Обычно матрос, обернув канат несколько раз вокруг кнехтов, просто придерживает свободный конец ногой, прижимая его к палубе.

Предположим, что после одного оборота каната вокруг столба сила  $F_0$ , приложенная к одному концу каната, уравнивается в  $k$  раз большую силу, приложенную к другому концу. Легко видеть, что тогда после еще одного оборота каната удерживаемая сила возрастает еще в  $k$  раз и станет в  $k^2$  раз больше, чем  $F_0$ .

Вообще, если канат прилегает к столбу вдоль дуги в  $\beta$  радиан, то с его помощью можно удержать силу, большую, чем  $F_0$ , в  $k^{\frac{\beta}{2\pi}}$  раз. Для пенькового каната и деревянного столба  $k = 2^{\frac{2\pi}{1.75}}$ . Поэтому, оборачивая канат вокруг столба три раза, получаем увеличение силы в  $2^{\frac{6\pi}{1.75}} \approx 1800$  раз. Именно этот эффект увеличения силы и позволяет одному человеку удержать корабль.

Описанное выше явление мы используем ежедневно, завязывая шнурки на ботинках, узлы на веревках и т. д. Так как узел — это веревка, обвитая вокруг другой веревки, он тем крепче, чем больше раз одна часть веревки сплетается с другой.

**Число  $e$ .** Числа 2 и  $\frac{1}{2}$  кажутся вполне естественными основаниями для показательных функций, выражающих те или иные физические законы, но в теоретических исследованиях удобнее брать другое основание — особое число, введенное Эйлером и обозначаемое буквой  $e$ . Это число определяется следующим образом.

Начертим график функции  $y = a^x$  при различных значениях основания  $a$ . Чем больше это основание, тем круче поднимается вверх график (рис. 58). Все начерченные графики пересекают ось ординат в точке  $(0; 1)$ . При этом угол между осью ординат и графиком функции  $y = 2^x$  приблизительно равен  $55^\circ$ , а для кривой  $y = 3^x$  этот угол примерно равен  $42^\circ$ . Поэтому если непрерывно

увеличивать основание  $a$  от 2 до 3, то угол между осью ординат и графиком показательной функции будет уменьшаться от  $55^\circ$  до  $42^\circ$  и потому при некотором значении основания  $a$  окажется равным  $45^\circ$ . Это значение  $a$  и называется числом  $e$ . Из сказанного выше следует, что число  $e$  заключено между числами 2 и 3. Более точные подсчеты показывают, что  $e$  равно 2,71828...

Число  $e$  иррационально. Более того, оно трансцендентно, т. е. не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.

Логарифмы по основанию  $e$  называются *натуральными* и обозначаются  $\ln x$ . Таким образом, запись  $y = \ln x$  обозначает, что  $x = e^y$ .

**Трос равного сопротивления разрыву.** Сейчас многие моря и океаны бороздят исследовательские корабли. В заранее установленных местах они останавливаются и спускают за борт трос, на конце которого находятся приборы. Их опускают на дно, а потом поднимают вверх и записывают показания. Но иногда происходит печальное событие — трос разрывается и все ценные приборы оказываются погребенными на дне моря.

Казалось бы, этой беды можно было бы избежать, сделав трос потолще. Но тут возникает новое осложнение — верхние части троса должны удерживать не только спускаемые приборы, но и нижнюю часть самого троса, а потому при утолщении всего троса на верхнюю часть ляжет слишком большая нагрузка.

Поэтому целесообразно делать нижнюю часть троса тоньше, чем верхнюю. Возникает вопрос: как должна меняться толщина троса для того, чтобы в любом его сечении на  $1 \text{ см}^2$  приходилась одна и та же нагрузка?

Исследование этого вопроса показало, что площадь сечения троса должна изменяться по следующему закону:

$$S = S_0 e^{\frac{(q - q_b) S_0 x g}{P}},$$

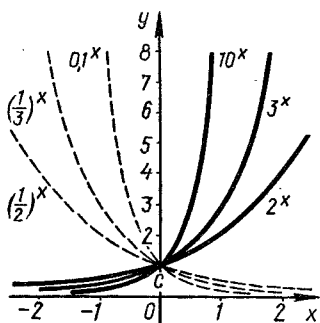


Рис. 58

где  $S_0$  — площадь его нижнего сечения,  $S$  — площадь сечения на высоте  $x$  от нижнего сечения,  $\rho$  — плотность вещества троса,  $\rho_b$  — плотность воды,  $g$  — ускорение свободного падения,  $P$  — вес в воде опускаемого груза.

Такой трос называют *тросом равного сопротивления разрыву*. Он имеет меньшую массу, чем трос постоянного сечения, рассчитанный на такую же нагрузку.

**Дифференциальное уравнение органического роста.** Если какая-нибудь величина изменяется по показательному закону  $y = y_0 a^t$ , то средняя скорость ее изменения за любой фиксированный промежуток времени пропорциональна значению величины в начале этого промежутка (впрочем, она пропорциональна и значению величины в конце промежутка, и ее значению в середине этого промежутка, только коэффициенты пропорциональности будут другими). В самом деле, средняя скорость за промежуток времени  $[t, t + h]$  выражается так:

$$v = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{y_0 a^{t+h} - y_0 a^t}{h} = \frac{a^h - 1}{h} y_0 a^t.$$

Но  $y_0 a^t$  и есть значение величины в начале промежутка, а потому  $v_{\text{ср}} = k_h y$ , где  $k_h = \frac{a^h - 1}{h}$ .

Коэффициент пропорциональности  $k_h$  зависит от выбранной длины промежутка  $h$ , и ни одно из значений  $h$  не может претендовать на то, чтобы выбрали именно его. Наиболее естественно рассматривать не среднюю, а мгновенную скорость, т. е. взять предел средней скорости, когда  $h$  стремится к нулю. В этом случае и коэффициент  $k_h$  приближается к некоторому предельному значению, которое мы обозначим  $k$ . Значит, для величин, изменяющихся по показательному закону вида  $y = y_0 a^t$ , справедливо равенство  $v_{\text{мгн}} = ky$ , где  $k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ . Но мгновенная скорость изменения величины есть не что иное, как ее производная,  $v_{\text{мгн}} = y'$ . Это позволяет переписать выведенный закон следующим образом:

$$y' = ky. \quad (1)$$

Иными словами, *величины, изменяющиеся по показательному закону, удовлетворяют дифференциальному уравнению (1)*. Можно доказать и обратное утвержде-

ние — все решения дифференциального уравнения (1) имеют вид  $y = y_0 a^t$ , где  $a$  и  $k$  связаны соотношением

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Мы докажем сейчас, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$ . Для этого вспомним, что по определению числа  $e$  угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = e^t$  в точке  $M(0; 1)$  равен 1. С другой стороны, этот угловой коэффициент равен значению производной от функции  $y = e^t$  при  $t = 0$ . Поэтому  $(e^t)'_{t=0} = 1$ . Но  $\frac{e^h - 1}{h}$  — средняя скорость изменения функции  $y = e^t$  за промежуток времени  $[0; h]$ , а  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$  — мгновенная скорость этого изменения при  $t = 0$ , т. е.  $(e^t)'_{t=0}$ . Итак, мы доказали, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ . А теперь уже легко установить, что

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \ln a} - 1}{h \ln a} \ln a = \ln a.$$

Так как  $k = \ln a$ , то  $a = e^k$  и  $a^t = e^{kt}$ .

Поэтому показательный закон изменения записывают в виде  $y = y_0 e^{kt}$ . Мы установили, что этот закон всегда имеет место, если мгновенная скорость изменения величины пропорциональна ее значению, причем коэффициент пропорциональности равен  $k$ . Поскольку такая пропорциональность имеет место, как мы видели в некоторых вопросах биологии, то говорят о *законе органического роста*.

По закону органического роста меняется не только численность живых организмов, но и, например, число научных статей. Как писал Ф. Энгельс, «Но наука растет, по меньшей мере, с такой же быстротой, как и население; население растет пропорционально численности последнего поколения, наука движется вперед пропорционально массе знаний, унаследованных ею от предшествующего поколения, следовательно, при самых обыкновенных условиях она также растет в геометрической прогрессии»<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Энгельс Ф. Наброски к критике политической экономии. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 1, с. 568.

Коэффициент  $k$  в уравнении (1) имеет во многих случаях естественный физический смысл. Например, в случае радиоактивного распада  $kdt$  показывает долю атомов, распавшихся за бесконечно малый промежуток времени  $[t, t + dt]$ . Очевидно, что, чем больше значение  $k$ , тем быстрее распадаются атомы, тем короче время их жизни. Это наводит на мысль, что среднее время жизни атомов обратно пропорционально  $k$ . И действительно расчеты показывают, что это среднее время равно  $\frac{1}{k}$ . Это значит, что если имеется некоторое количество атомов данного радиоактивного вещества, и мы сложим времена жизни для каждого атома, а сумму разделим на число всех атомов, то в частном получим  $\frac{1}{k}$ .

Полученный ответ кажется удивительным: получается, что среднее время жизни атомов радиоактивного вещества не зависит от того момента, начиная с которого ведется отсчёт. Иными словами, если какой-то кусок урана остался со времени образования земного шара, то среднее время жизни составляющих его атомов не изменилось за прошедшие миллиарды лет. Тем не менее это действительно так. Дело в том, что этот кусок урана — остаток большого куска, частично распавшегося за это время, а оставшиеся атомы «не помнят о своем прошлом». Таким образом, вероятность их распада в каждый момент времени  $t$  не зависит от того, сколько времени они до этого существовали.

Мы можем также написать в более точном виде и закон трения каната о столб (см. с. 122). Именно, если коэффициент трения каната о столб равен  $k$ , то  $F = F_0 e^{k\varphi}$ , где  $\varphi$  — величина дуги (в радианах), вдоль которой канат соприкасается со столбом.

**Разветвленные цепные реакции.** Вряд ли можно встретить сейчас человека, который не слышал бы о цепных реакциях, — даже в спортивных комментариях встречается иногда упоминание о цепной реакции неудач команды. Цепными реакциями химики занимаются уже несколько десятилетий. Первоначально они рассматривали лишь так называемые неразветвленные цепные реакции, в которых ион или свободный радикал, вызвавший реакцию, в конце ее появляется вновь и может вызвать ту же реакцию еще раз, потом еще и еще, пока он не покинет сосуд, в котором происходит реакция, или не соединится

с другим таким же ионом, превратившись из возмутителя спокойствия в тихую молекулу.

Но в конце 20-х годов молодой советский химик Николай Николаевич Семенов, который тогда еще не был ни академиком, ни лауреатом многочисленных премий (в том числе Ленинской и Нобелевской), открыл цепные реакции нового вида. В конце каждого этапа этих реакций ион или свободный радикал, послуживший для них затравкой, появлялся в нескольких экземплярах. Впрочем, хватило бы и двух таких экземпляров, чтобы число возмутителей спокойствия стало расти, как число зерен на шахматной доске. А так как в ходе каждого этапа реакции выделялась энергия, то вскоре выделение энергии становилось таким бурным, что происходил небольшой взрыв. Н. Н. Семенов объяснил многие стороны этих реакций, например существование наименьшего объема сосуда и наименьшего давления в этом сосуде, без которых реакция не шла. Дело заключалось в том, что часть возникших ионов или свободных радикалов оседала на стенках сосуда, и нужно было, чтобы число оставшихся было достаточно велико, а это обеспечивалось достаточно большими размерами сосуда и давлением в нем.

Труды Н. Н. Семенова по теории разветвленных цепных реакций стали настольными у химиков. Но вскоре его работами заинтересовались и специалисты по атомному ядру. Дело в том, что именно цепные реакции оказались ключом, позволившим человечеству открыть кладовые с неисчерпаемыми запасами ядерной энергии. В 1938 году было установлено, что при попадании нейтрона в атомное ядро урана оно раскалывается на две части, причем этот процесс сопровождается испусканием новых нейтронов. При этом выяснилось, что при некоторых условиях число вновь образующихся нейтронов превышает число нейтронов, вызвавших распад, а потому начинается цепная реакция распада ядер, сопровождающаяся выделением громадного количества энергии, т. е., попросту говоря, происходит атомный взрыв.

Для мирного использования атомной энергии такой ход процесса не годится — здесь нужно, чтобы энергия выделялась примерно равномерно со скоростью, удобной для практического использования. Этого можно добиться, если принять во внимание, что не все нейтроны вызывают деление ядер урана — некоторые из них совсем уходят из системы, а часть захватывается атомами при-

месей, не вызывая деления их ядер. Вдвигая и выдвигая стержни, сделанные из материала, энергично захватывающего нейтроны, можно получить желаемое течение процесса.

Но чтобы управлять процессом размножения нейтронов, надо изучить его закономерности. В грубом приближении он происходит следующим образом. За бесконечно малое время  $dt$  каждый нейтрон проходит путь  $vdt$ , где  $v$  — его скорость. На этом пути он может столкнуться с ядрами урана, центр которых принадлежит цилиндру радиуса  $R$ , где  $R$  — радиус ядра урана. Объем этого цилиндра равен  $\pi R^2 \cdot vdt$ . Будем считать, что в единице объема находится  $N$  ядер урана и что доля случаев, когда попадание нейтрона в ядро вызывает распад, равна  $\alpha$ . Тогда число делений за время  $dt$ , приходящееся на долю одного нейтрона, равно  $N\alpha\pi R^2 vdt$ , а общее число делений равно  $N\alpha\pi R^2 vndt$ , где  $n$  — число нейтронов во всем объеме.

Пусть при каждом делении испускается  $\nu$  нейтронов и один нейтрон поглощается. Тогда число нейтронов при каждом делении меняется на  $\nu - 1$ , а потому изменение числа нейтронов за счет деления выражается так:  $dn = N(\nu - 1)\alpha\pi R^2 vndt$ .

За этот же промежуток времени  $dt$  часть нейтронов вылетает за пределы системы или поглощается примесями.

Для простоты расчета пренебрежем примесями, количество которых можно значительно уменьшить путем тщательной химической очистки урана. Тогда надо учесть лишь количество нейтронов, покидающих систему через ее поверхность со скоростью  $v$ . Рассказывают, что когда Пафнутий Львович Чебышев делал в Парижской Академии наук доклад «О кройке одежды», послушать его собрались лучшие модельеры и закройщики Парижа. Однако они покинули зал, услышав первые слова доклада: «Для простоты предположим, что человеческое тело имеет форму шара». Тем не менее мы тоже для простоты положим, что рассматриваемый кусок урана имеет форму шара радиуса  $r$ . Нейтроны, вылетевшие за пределы этого шара за промежуток времени  $dt$ , находились в слое толщины  $vdt$ , объем которого равен  $4\pi r^2 vdt$ . Так как объем всего шара  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , то концентрация нейтронов равна



$\frac{n}{V}$ , а потому число нейтронов в рассматриваемом слое выражается так:

$$\frac{n}{V} 4\pi r^2 v dt = \frac{3n v dt}{r}.$$

Значит, количество нейтронов, покидающих шар, равно  $\frac{3k n v dt}{r}$  ( $k$  — числовой коэффициент, связанный с тем, что не у всех нейтронов скорость направлена наружу, а некоторые движутся внутрь шара; опыт показывает, что  $k \approx 0,3$ ). Итак, за счет вылета нейтронов их число уменьшается на  $\frac{3k v n dt}{r}$ .

Наконец, предположим, что существует постоянный источник нейтронов (например, бериллий, облучаемый радием), который за время  $dt$  дает  $q_0 dt$  нейтронов. Тогда общее изменение числа нейтронов за промежуток времени  $dt$  выражается так:  $dn = (a - b) n dt + q_0 dt$ , где для краткости положено  $a = N(v - 1) \alpha \pi R^2 v$ ,  $b = \frac{3k v}{r}$ . Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dn}{dt} = (a - b) n + q_0. \quad (1)$$

**Исследование уравнения размножения нейтронов.** Дифференциальное уравнение (1) описывает, как меняется число нейтронов. Но, чтобы управлять процессом размножения нейтронов, надо не только написать уравнение, но и решить его. Рассмотрим сначала случай, когда  $q_0 = 0$ , т. е. когда в начале процесса было  $n_0$  нейтронов, а все остальные нейтроны появляются лишь за счет распада урана. Тогда уравнение упрощается и принимает вид  $\frac{dn}{dt} = (a - b) n$ . Это — дифференциальное уравнение органического роста. Его решение имеет вид  $n = n_0 e^{(a-b)t}$ .

Если  $a < b$ , то число нейтронов убывает, а если  $a > b$ , то оно возрастает по показательному закону. Таким образом, если  $a < b$ , то процесс распада ядер затухает и взрыва не происходит, а если  $a > b$ , то количество распадающихся ядер увеличивается лавинообразно.

Соотношение между  $a$  и  $b$  зависит от радиуса  $r$ . В самом деле, неравенство  $a > b$  можно записать в следующем виде

$$N(v-1)\alpha\pi R^2 v < \frac{3kv}{r}.$$

Это неравенство позволяет определить *критический радиус*  $r_{\text{кр}}$ , т. е. такой радиус, что при  $r < r_{\text{кр}}$  нейтроны не размножаются, а при  $r > r_{\text{кр}}$  происходит взрыв:

$$r_{\text{кр}} = \frac{3k}{N(v-1)\alpha\pi R^2}.$$

Соответствующее значение массы уранового шара называют *критической массой*.

Определение критической массы требует ряда физических опытов, позволяющих установить число нейтронов, возникающих после распада каждого атома урана, радиус захвата  $R$  и т. д. Все эти физические константы надо найти с высокой точностью, так как небольшие отклонения от критической массы в корне меняют ход процесса. Ошибка, совершенная во время войны нацистскими физиками в определении одной из таких констант, привела к тому, что все выбранное ими направление в работе над урановым проектом оказалось неверным.

Если взять два полусферических куска урана, масса каждого из которых меньше критической, а суммарная масса больше критической, и быстро сблизить их, то начинается цепная реакция, приводящая к атомному взрыву. Это лежит в основе устройства атомной бомбы. Подсчеты, которые мы опускаем, показывают, что если масса сферического куска урана-235 превышает критическую хотя бы на 10%, то все атомы распадутся менее чем за одну микросекунду. График, показывающий число атомов, распавшихся за одну микросекунду, как функцию радиуса, почти сливается с ломаной, состоящей из отрезка оси абсцисс от 0 до  $r_{\text{кр}}$  и вертикальной прямой, соответствующей  $r = r_{\text{кр}}$ .

Как уже отмечалось, для мирного использования атомной энергии не годятся ни затухание процесса деления, ни его лавинообразный рост. Чтобы получить управляемый процесс, придется ввести постоянный источник нейтронов и решить полное уравнение (1), с.129.

Одним из решений этого уравнения является число  $\frac{q_0}{b-a}$  (напомним, что производная от постоянной равна нулю). Введем теперь новую искомую функцию  $y(t)$ , положив  $n(t) = \frac{q_0}{b-a} + y(t)$ . Если подставить это выражение в уравнение (1), то получим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = (a-b)y,$$

решение которого имеет вид  $y = Ce^{(a-b)t}$ . Поэтому

$$n = \frac{q_0}{b-a} + Ce^{(a-b)t}.$$

Значение  $C$  определяется начальными условиями. Если в самом начале не было нейтронов, т. е.  $n(0) = 0$ , то получаем решение в виде

$$n = \frac{q_0}{b-a} (1 - e^{(a-b)t}). \quad (1)$$

Если  $a < b$ , то при возрастании  $t$  функция  $e^{(a-b)t}$  быстро стремится к нулю, и поэтому число нейтронов в системе приближается к значению  $\frac{q_0}{b-a}$ . Теперь ясно, что, управляя значением  $b$  (т. е. количеством поглощаемых нейтронов), можно получить желаемое значение распада ядер в секунду, т. е. желаемое количество энергии. Поддержание системы в состоянии, близком к критическому, осуществляется путем автоматического регулирования. Здесь возникают сложные математические задачи, для решения которых применяют быстродействующие вычислительные машины.

Разумеется, разобранный выше схема дает лишь грубое приближение к реальной действительности. Точная теория требует учета формы реактора, распределения скоростей нейтронов по направлению и величине и многих иных факторов. Но и грубый расчет дает правильную качественную картину явления.

**Процессы выравнивания.** Формула (1), полученная выше, показывает, как количество нейтронов увеличивается от нулевого значения до значения, неотличимого от  $\frac{q_0}{b-a}$ . Процессы такого вида называют *процессами вы-*

*равнивания*. Они возникают обычно, когда скорость изменения какой-нибудь величины пропорциональна отклонению этой величины от одного из ее значений  $A$  и имеет знак, обратный этому отклонению. Именно это имело место в рассматриваемой задаче, поскольку уравнение (1) на с. 129 можно переписать в виде

$$\frac{dn}{dt} = (a - b) \left( n - \frac{q_0}{b - a} \right),$$

причем  $a - b < 0$ . В этом случае значение величины быстро приближается к значению  $A$ .

Рассмотрим некоторые другие процессы выравнивания. Если снять кипящий чайник с огня, то сначала он остывает быстро, а потом остывание идет гораздо медленнее. Дело в том, что скорость остывания пропорциональна разности между температурой  $T$  чайника и температурой  $T_0$  окружающего воздуха. Постепенно происходит теплообмен между чайником и окружающим его воздухом и температура выравнивается. Закон изменения температуры чайника имеет вид

$$T = T_0 + (100 - T_0)e^{-kt}.$$

Значение коэффициента  $k$  зависит от формы чайника, материала, из которого он сделан, и количества воды, которое в нем находится. Медленнее всего остывает чайник, имеющий шарообразную форму. Доказано, что из всех тел заданного объема шар имеет наименьшую площадь поверхности, а потому площадь, на которой происходит теплоотдача, у такого чайника наименьшая.

Другим процессом выравнивания, с которым часто приходится иметь дело, является включение и выключение электротока. Если повернуть выключатель, то лампочка загорается так быстро, что весь процесс кажется протекающим мгновенно. На самом деле, и здесь происходит процесс выравнивания, осложняющийся еще тем, что в цепи течет переменный ток.

Изучим, как меняется ток, если включается источник, имеющий постоянную ЭДС  $E_0$ . Пусть сопротивление цепи равно  $R$  и в цепь включена катушка индуктивностью  $L$ . Тогда, как известно, имеет место равенство  $E_0 = \varphi_R + \varphi_L$ , где  $\varphi_R$  и  $\varphi_L$  — падение напряжения на соответствующих участках цепи. При этом  $\varphi_R = RI$ , а  $\varphi_L = L \frac{dI}{dt}$ . Таким

образом, дифференциальное уравнение изменения силы тока имеет вид

$$RI + L \frac{dI}{dt} = E_0,$$

т. е.

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \left( I - \frac{E_0}{R} \right). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение (1) имеет уже знакомый нам вид, и его решение записывается следующим образом:

$$I = \frac{E_0}{R} + A \bar{e}^{\frac{Rt}{L}}.$$

Поскольку в начале сила тока равнялась нулю, то  $A = -\frac{E_0}{R}$ , и потому

$$I = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right).$$

При возрастании  $t$  вычитаемое  $\bar{e}^{\frac{Rt}{L}}$  быстро уменьшается и в пределе мы получаем для  $I$  значение, даваемое законом Ома:

$$I = \frac{E_0}{R}.$$

Весьма интересным является процесс размыкания цепи с индуктивностью. Если закоротить контур, выключив из него ЭДС, то сила тока в контуре начнет уменьшаться по закону

$$I = I_0 \bar{e}^{\frac{Rt}{L}},$$

где  $I_0$  — сила тока в момент времени  $t = 0$ . Совсем иным будет этот закон, если внезапно разомкнуть цепь. В этом случае сопротивление цепи очень быстро изменяется от значения  $R$  до бесконечности (или, если угодно, до очень большого значения). Если сила тока уменьшается от значения  $I_0$  до нуля за короткое время  $\tau$ , то скорость ее изменения  $\frac{dI}{dt} = -\frac{I_0}{\tau}$  весьма велика, и потому из-за самоиндукции возникает большая разность потенциалов на

пластинах рубильника, примерно равная  $-\frac{LI_0}{\tau}$ . При этом может произойти пробой воздушного пространства между разомкнутыми пластинами рубильника и между ними проскочит искра.

Таким образом, при размыкании можно получить разность потенциалов, во много раз превышающую ЭДС источника напряжения. Этим широко пользуются в технике, в частности в системе зажигания двигателей внутреннего сгорания. Описанное явление имеет и неприятную сторону — электрические лампочки чаще всего перегорают при включении или выключении света. Чтобы избежать этого, в кинотеатрах выключают свет постепенно, с помощью реостата. Тогда  $I$  уменьшается медленно и ЭДС самоиндукции невелика.

**Падение с парашютом.** При падении тел в безвоздушном пространстве их скорость равномерно увеличивается. Иначе обстоит дело, если падение происходит в воздухе. Будем для простоты считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения, т. е.  $F = -kv$  (знак «минус» поставлен потому, что сила сопротивления воздуха направлена в сторону, противоположную направлению падения). Если масса тела равна  $m$ , то сила  $F$ , действующая на тело, равна  $mg - kv$ . Так как по второму закону Ньютона  $F = ma$ , где  $a = \frac{dv}{dt}$  — ускорение, то получаем дифференциальное уравнение

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \left( v - \frac{mg}{k} \right).$$

Его решение, соответствующее начальному значению  $v_0 = 0$ , имеет вид

$$v = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right).$$

По прошествии некоторого времени  $e^{-\frac{kt}{m}}$  станет очень малым числом и скорость падения будет почти в точности равна  $\frac{mg}{k}$ , т. е. падение станет равномерным. Коэффициент  $k$  зависит от плотности воздуха, площади падающего

тела и т. д. Например, при падении с парашютом этот коэффициент довольно велик и потому скорость приземления парашютиста сравнительно невелика — примерно 5 м/с. Ясно, что скорость падения пушинки будет меньше, чем скорость падения свинцового шарика, имеющего ту же массу, — у пушинки гораздо больше площадь и потому больше значение  $k$ . Именно поэтому пушинка так медленно опускается вниз и так легко увлекается восходящим потоком воздуха. Аристотель в своих рассуждениях о падении не учел сопротивления воздуха и считал, что тяжелые тела падают во столько раз быстрее легких, во сколько раз они тяжелее их. Галилей экспериментально опроверг это утверждение, бросая шары с наклонной Пизанской башни.

**Показательная функция и биология.** Процессы выравнивания часто встречаются и в биологии. Например, при испуге в кровь внезапно выделяется адреналин, который потом разрушается, причем скорость разрушения примерно пропорциональна количеству этого вещества, еще остающемуся в крови. При диагностике почечных болезней часто определяют способность почек выводить из крови радиоактивные изотопы, причем их количество в крови падает по показательному закону. Примером обратного процесса может служить восстановление концентрации гемоглобина в крови у донора или у раненого, потерявшего много крови. В этом случае по показательному закону убывает разность между нормальным содержанием гемоглобина и имеющимся количеством этого вещества. Как и при радиоактивном распаде, скорость распада или восстановления измеряется временем, в течение которого распадается (соответственно восстанавливается) половина вещества. Для адреналина этот период измеряется долями секунды, для веществ, выводимых почками, — минутами, а для гемоглобина — днями.

Разумеется, показательный закон изменения выполняется в биологических процессах лишь приближенно, так как мы имеем здесь дело с весьма сложными системами. Кроме того, обычно процесс разрушения или восстановления состоит из нескольких стадий, каждая из них имеет свой период. Наконец, надо учитывать, что распад одного и того же вещества может совершаться по разным каналам.

**Как измеряют высоту с помощью барометра.** Одного американского студента спросили на экзаменах: «Как

измерить высоту небоскреба с помощью барометра?» «Для этого есть целый ряд способов, — ответил студент. — Например, можно привязать барометр к веревке и опустить его с вершины небоскреба на землю. А можно взять барометр и посчитать, сколько раз его диаметр укладывается вдоль стены небоскреба. После этого достаточно измерить диаметр барометра, чтобы найти высоту небоскреба».

Разумеется, экзаменуемый шутил — он хорошо знал, о каком способе измерения высоты шла речь. Известно, что чем выше поднимается самолет над поверхностью Земли, тем разреженнее становится атмосфера, тем меньше давление воздуха. Как показывают расчеты, при постоянной температуре воздуха разность высот двух точек выражается такой формулой:

$$h_2 - h_1 = \frac{p_0 T}{273 \rho_0} \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — давление воздуха на высотах  $h_1$  и  $h_2$ ,  $p_0$  — давление воздуха на уровне моря,  $\rho_0$  — плотность воздуха при температуре  $0^\circ\text{C}$  и давлении  $p_0$ ,  $T$  — абсолютная температура воздуха. Следует иметь в виду, что эта формула годится лишь для не очень больших высот. Исследования, проведенные в Советском Союзе по программе Международного геофизического года, показали, что на больших высотах давление меняется по иному закону.

**Закон Циолковского.** Много трудных задач приходится решать в теории межпланетных путешествий. Одной из них является задача об определении массы топлива, необходимой для того, чтобы придать ракете скорость  $v_1$ , нужную для достижения Луны, Венеры, Марса или какой-нибудь иной планеты. Эта масса зависит от массы  $m_0$  самой ракеты (без топлива) и от скорости  $v_0$ , с которой продукты горения вытекают из сопел ракетного двигателя.

Основатель космонавтики, великий русский ученый К. Э. Циолковский (1857—1935) рассмотрел задачу о массе топлива для ракеты, пренебрегая сопротивлением воздуха и притяжением Земли. Он доказал, что в этом случае масса топлива выражается формулой

$$M = m_0 \left( e^{\frac{v_1}{v_0}} - 1 \right).$$



Вывод этой формулы основан на том, что при движении механической системы под действием внутренних сил ее импульс не меняется. Будем считать, что ракета движется прямолинейно, причем ее скорость в момент времени  $t$  равна  $v(t)$ , а относительная скорость частиц, вылетающих из сопла, постоянна и равна  $v_0$ . Тогда скорость  $u(t)$  этих частиц относительно неподвижной системы координат равна  $v(t) - v_0$ .

За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  масса ракеты уменьшается за счет выбрасывания частиц и принимает значение  $m + dm$  (здесь  $dm < 0$ ). Скорость ее движения при этом увеличивается и становится равной  $v + dv$ . Значит, импульс ракеты станет  $(m + dm)(v + dv)$ . Импульс выброшенных за промежуток времени  $dt$  частиц равен  $(-dm)u$  (их масса равна  $-dm$ ). Так как общий импульс не изменяется, то должно иметь место равенство

$$(m + dm)(v + dv) - u dm = mv.$$

Поскольку  $u = v - v_0$ , то после отбрасывания бесконечно малой высшего порядка  $dmdv$  получаем следующее дифференциальное уравнение:  $mdv + v_0 dm = 0$ , или  $\frac{dm}{dv} = -\frac{m}{v_0}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$m = Ce^{-\frac{v}{v_0}}.$$

Чтобы найти значение  $C$ , примем во внимание, что при  $t = 0$  ракета покоилась, а ее масса  $m$  равнялась  $m_0 + M$ , где  $m_0$  — масса ракеты без топлива, а  $M$  — масса топлива. Поэтому  $m_0 + M = Ce^0$  и, значит,

$$m = (m_0 + M)e^{-\frac{v}{v_0}}.$$

Максимальное значение скорости  $v_1$  достигается, когда все топливо выгорит, т. е.  $m = m_0$ . Поэтому

$$m_0 = (m_0 + M)e^{-\frac{v_1}{v_0}},$$

откуда и следует формула (1).

**Музыка и логарифмы.** Раскапывая одно из поселений каменного века на территории Украины, археологи обна-

ружили несколько костей мамонта, назначение которых было им непонятно. Лишь внимательный анализ показал, что на этих костях остались следы ударов — это были остатки шумового оркестра, под звуки которого в древности совершались магические танцы. Позднее заметили, что более приятные звуки можно получить, сделав барабан или просверлив тростинку, чтобы получилась свирель. А звучание тетивы лука навело на мысль о создании струнных инструментов.

Пифагор был не только великим математиком, но и хорошим музыкантом. Он установил, что приятные сочетания звуков соответствуют определенным соотношениям между длинами колеблющихся струн или расстояниями между дырочками свирели, и создал первую математическую теорию музыки. И хотя музыканты не любят поверять «алгеброй гармонию», они все время имеют дело с математикой, так как современная гамма основана на логарифмах. Приведем отрывок из статьи известного русского физика А. А. Эйхенвальда, посвященный этому вопросу.

«Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математики. Он даже говорил с пренебрежением, что музыка и математика друг с другом не имеют ничего общего. «Правда, Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, — но ведь как раз пифагорова-то гамма для нашей музыки и оказалась неприменимой».

Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах... И действительно, так называемые «ступени» темперированной хроматической гаммы не расставлены на равных расстояниях ни по отношению к числам колебаний, ни по отношению к длинам волн соответствующих звуков, а представляют собой логарифмы этих величин. Только основание этих логарифмов равно 2, а не 10, как принято в других случаях.

Положим, что нота *do* самой низкой октавы — будем ее называть нулевой октавой — определена  $n$  колебаниями в секунду. Тогда *do* первой октавы будет делать в секунду  $2n$  колебаний, а  $m$ -й октавы  $n \cdot 2^m$  колебаний и т. д. Обозначим все ноты хроматической гаммы рояля номерами  $p$ , принимая основной тон каждой октавы за нулевой; тогда, например, тон *sol* будет 7-й, *la* будет 9-й

и т. д.; 12-й тон будет опять *do*, только октавой выше. Так как в темперированной хроматической гамме каждый последующий тон имеет в  $\sqrt[12]{2}$  большее число колебаний, чем предыдущий, то число колебаний любого тона можно выразить формулой

$$N_{pm} = n 2^m (\sqrt[12]{2})^p.$$

Логарифмируя эту формулу, получаем:

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg 2 + p \frac{\lg 2}{12},$$

$$\text{или } \lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12}\right) \lg 2,$$

а принимая число колебаний самого низкого *do* за единицу ( $n = 1$ ) и переводя все логарифмы к основанию, равному 2 (или просто принимая  $\lg 2 = 1$ ), имеем:

$$\lg N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

Отсюда видно, что номера клавиш рояля представляют собой логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков. Мы даже можем сказать, что номер октавы представляет собой характеристику, а номер звука в данной октаве — мантиссу этого логарифма».

**Логарифмы и ощущения.** Ощущения, воспринимаемые человеческими органами чувств, могут вызываться раздражениями, отличающимися друг от друга во много миллионов и даже миллиардов раз. Удары молота о стальную плиту порождают шум, который в сто миллиардов раз громче, чем тихий шелест листьев, а яркость вольтовой дуги в триллионы раз превосходит яркость какой-нибудь слабой звездочки, едва видимой на ночном небе. Если бы ощущения были пропорциональны раздражениям, то органы чувств должны были бы давать ощущения, отличающиеся друг от друга в миллиарды и триллионы раз. Но никакие физиологические процессы не позволяют дать такого диапазона ощущений. Поставленные опыты показали, что организм как бы «логарифмирует» полученные им раздражения. Это значит, что величина ощущения приблизительно пропорциональна логарифму величины раздражения.

**Ода экспоненте.** Поистине безграничны приложения показательной и логарифмической функций в самых различных областях науки и техники (и даже, как мы видели, учения о музыке). А ведь придумывали логарифмы для облегчения вычислений. И три столетия с того дня, как в 1614 году были опубликованы первые логарифмические таблицы, составленные Джоном Непером (1550—1617), они верой и правдой служили астрономам и инженерам, геодезистам и морякам, сокращая время на вычисления и тем самым, как сказал знаменитый французский ученый Лаплас (1749—1827), удлиняя жизнь вычислителям.

Еще недавно трудно было представить себе инженера без логарифмической линейки в кармане; изобретенная через десяток лет после появления логарифмов Непера английским математиком Гунтером (1581—1626), она позволяла быстро получать ответ с достаточной для инженера точностью в три значащие цифры. И хотя теперь ее все настойчивее вытесняют из инженерного обихода микрокалькуляторы, можно смело сказать, что без логарифмической линейки не были бы построены ни первые компьютеры, ни калькуляторы.

Многообразные применения показательной (или, как ее еще называют, экспоненциальной) функции вдохновили английского поэта Элмера Брилла на написание «Оды экспоненте», отрывок из которой гласит:

«...Ею порождено многое из того,  
Что «достойно упоминания»,  
Как говорили наши англосаксонские предки.  
Могущество ее порождений  
Заранее обусловлено ее собственной красотой и силой,  
Ибо они суть физическое воплощение  
Абстрактной идеи *e*.  
Английские моряки любят и знают ее  
Под именем «Гунтер».  
Две шкалы Гунтера —  
Вот чудо изобретательности.  
Экспонентой порождена  
Логарифмическая линейка:  
У инженера и астронома не было  
Инструмента полезнее, чем она.  
Даже изящные искусства питаются ею.  
Разве музыкальная гамма не есть набор неперовых логарифмов?  
И таким образом нечто абстрактно красивое  
Стало предком одного из величайших человеческих достижений».

Были поэты, которые не посвящали экспоненте и логарифмам целых од, но упоминали их в своих стихах. На-

пример, известный советский поэт Борис Слуцкий в своем нашумевшем стихотворении «Физики и лирики» писал.

«Потому-то, словно пена,  
Опадают наши рифмы  
И величие степенно  
Отступает в логарифмы».

Некоторые ученые полагают, впрочем, что здесь вместо слова «логарифмы» более уместно было бы «алгорифмы» — ведь теперь прикладная мощь математики ассоциируется именно с ними. Но не будем пытаться поверять «алгеброй гармонию».

**Полярные координаты.** С показательной и логарифмической функциями связаны многие замечательные кривые, о которых будет рассказано ниже. Но, чтобы получить эти кривые, надо воспользоваться не обычными декартовыми координатами, а так называемыми *полярными координатами*.

Многие величины так или иначе зависят от некоторых направлений. Например, сила света, испускаемого электрической лампой, различна в разных направлениях. Для наглядного изображения такой зависимости целесообразно провести из некоторой точки  $O$  лучи в разных направлениях и на каждом из них отложить отрезок, изображающий силу света в этом направлении. Концы отложенных отрезков образуют линию, которую называют *полярной диаграммой зависимости*.

Чтобы выразить такие зависимости, используют полярную систему координат. Для этого выбирают точку  $O$  (*полюс*) и из нее проводят луч (*полярную ось*). Теперь положение точки  $M$  на плоскости определяется двумя числами: расстоянием  $r$  от этой точки до полюса  $O$ ,  $r = |OM|$ , и углом  $\varphi$  между лучом  $OM$  и полярной осью (этот угол отсчитывают от полярной оси против часовой стрелки) (рис. 59). Из определения видно, что  $r$  изменяется от 0 до  $\infty$ , а  $\varphi$  — от 0 до  $2\pi$  (как принято в математике, углы измеряют не в градусах, а в радианах). Зависимость  $r = r(\varphi)$  между полярными координатами точек кривой  $\Gamma$  называют уравнением этой кривой в полярных координатах.

Иногда приходится иметь дело с функциональными зависимостями, в которых надо различать углы  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi$ . Например, натяжение вдоль каната, обмотанного вокруг столба, меняется по закону  $F = F_0 e^{k\varphi}$ . Здесь уже

углы  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi$  следует считать различными — во втором случае добавляется лишний оборот каната вокруг столба. При изображении таких зависимостей получают линии, пересекающие несколько раз лучи, выходящие из полюса. Например, архимедова спираль задается формулой  $r = a\varphi$ , причем здесь уже надо считать, что  $\varphi$  меняется от  $-\infty$  до  $\infty$ .

С каждой полярной системой координат связана декартова система координат, у которой начало совпадает с полюсом, а ось абсцисс — с полярной осью. Из рисунка 59 видно, что полярные координаты  $r$  и  $\varphi$  связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Определение положения точки по ее полярным координатам использовали, по сути дела, древние астрономы — ведь долгота и широта и являются полярными координатами на сфере. И сейчас этими координатами пользуются при походах по азимуту.

Нам понадобится в дальнейшем формула для тангенса угла  $\alpha$  между радиус-вектором  $OM$ , проведенным в некоторую точку  $M$  кривой  $\Gamma$ , и касательной к этой кривой в той же точке (рис. 60). Если уравнение кривой в полярных координатах имеет вид  $r = r(\varphi)$ , то справедлива формула

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}. \quad (1)$$

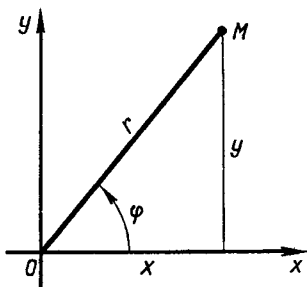


Рис. 59

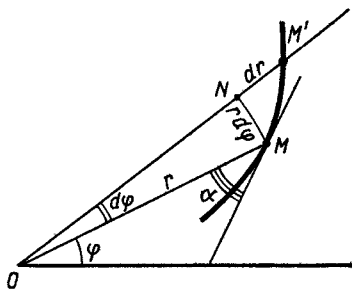


Рис. 60

Во времена Лейбница и Бернулли такую формулу доказывали следующим рассуждением. Возьмем бесконечно малую дугу  $MM'$  нашей кривой, проведем радиус-вектор  $OM'$  и обозначим угол между лучами  $OM$  и  $OM'$  через  $d\varphi$ . Проведем еще дугу окружности  $MN$  с центром  $O$ . Тогда «катеты»  $MN$  и  $M'N$  бесконечно малого «прямоугольного треугольника»  $MNM'$  имеют длины  $rd\varphi$  и  $dr$ , а угол  $MM'N$  равен  $\alpha$ . Значит,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{rd\varphi}{dr}$ , откуда и следует формула (1).

Одновременно получаем, что  $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$ . Теперь это доказательство считают недостаточно строгим и заменяют его почти страницей выкладок.

**Преобразованная, возрождаюсь вновь.** Самолет, вылетевший из какой-нибудь точки земного шара прямо на север, через некоторое время окажется над Северным полюсом. Если же он полетит на восток, то, облетев параллель, вернется в тот же пункт, из которого вылетел. Предположим теперь, что самолет выберет промежуточное направление и будет лететь, держась все время одного и того же курса, т. е. пересекая все меридианы под одним и тем же углом, отличным от прямого. Когда он облетит земной шар, то попадет в точку, имеющую ту же долготу, что и точка вылета, но расположенную ближе к Северному полюсу. После следующего облета он окажется еще ближе к полюсу и, продолжая лететь указанным образом, будет описывать вокруг полюса сужающуюся спираль.

Изобразим теперь полярную область на карте так, чтобы при этом сохранились углы между линиями, т. е. чтобы угол между двумя линиями на земном шаре был равен углу между изображениями этих линий на карте (под углом между линиями понимают угол между их касательными в точке пересечения). Такую карту можно сделать, например, проведя плоскость, касающуюся земного шара в Северном полюсе, и спроектировав из Южного полюса на эту плоскость земную поверхность.

На полученной карте путь самолета изобразится спиралью, пересекающей под одним и тем же углом все лучи, выходящие из Северного полюса (рис. 61). Выведем уравнение этой спирали в полярных координатах. Для этого заметим, что касательные к спирали пересекают соответствующие радиус-векторы под одним и тем же углом. А в предыдущем пункте мы установили, что

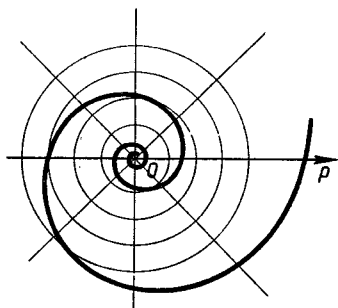


Рис. 61

тангенс этого угла ( $\alpha$ ) равен  $\frac{r'}{r}$ . Поэтому дифференциальное уравнение спирали имеет вид  $\frac{r'}{r} = \text{ctg} \alpha$ , т. е.  $r' = kr$ , где  $k = \text{ctg} \alpha$ . Решая его, получаем, что  $r = Ce^{k\varphi}$ , или, иначе,

$$\varphi = \frac{1}{k} \ln \frac{r}{C}.$$

Так как это уравнение связано с логарифмической функцией, то выражаемую им спираль Пьер Вариньон (1654—1722) назвал логарифмической. При выводе уравнения логарифмической спирали получилось не одно уравнение, а бесконечное множество: постоянная  $C$  может иметь бесконечно много значений. Спирали, принадлежащие семейству линий  $r = Ce^{k\varphi}$ , получаются друг из друга с помощью гомотетии относительно центра  $O$ . Но эти же спирали можно получить друг из друга и вращением вокруг точки  $O$ . В самом деле, при повороте на угол  $\beta$  уравнение  $r = Ce^{k\varphi}$  переходит в уравнение  $r = Ce^{k(\varphi - \beta)}$ , т. е. в  $r = C_1 e^{k\varphi}$ , где  $C_1 = Ce^{-k\beta}$ . Таким образом, поворот на угол  $\beta$  равносильен преобразованию гомотетии с коэффициентом  $e^{-k\beta}$ . Этим объясняется любопытный оптический эффект. Если вращать рисунок, на котором изображено семейство логарифмических спиралей, то при вращении в одном направлении мы увидим, что спирали будут расширяться, а при вращении в противоположном направлении они будут сужаться.

Логарифмическая спираль обладает целым рядом замечательных свойств. Хотя она делает бесконечно много оборотов вокруг полюса, длина ее сужающейся части, которая начинается в точке  $M(r, \varphi)$ , конечна и равна  $\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} r$ . Поэтому длина дуги  $AB$  этой спирали пропорциональна разности длин радиус-векторов, проведенных в точки  $A$  и  $B$  (коэффициент пропорциональности равен  $\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$ ).

Если намотать на логарифмическую спираль нить, концом которой служит точка  $O$ , и начать разматывать



эту нить, то второй конец нити опишет линию, равную исходной спирали. Точно так же равную спираль образуют основания перпендикуляров, опущенных из полюса на касательные к логарифмической спирали.

Эта способность логарифмической спирали оставаться неизменной при самых различных преобразованиях настолько поразила впервые изучавшего ее Якоба Бернулли, что он назвал ее *spira mirabilis* (чудесная спираль). Он даже придавал ее свойствам мистический смысл и завещал, чтобы на его надгробье изобразили эту спираль и написали: *Eatem mutata, resurgo* (преобразованная, возрождаюсь вновь).

**Логарифмическая спираль в природе и технике.** В технике часто применяют вращающиеся ножи. Сила, с которой они давят на разрезаемый материал, зависит от угла резания, т. е. угла между лезвием ножа и направлением скорости вращения. Для постоянства давления нужно, чтобы угол резания сохранял постоянное значение, а это будет в том случае, если лезвия ножей очерчены по дуге логарифмической спирали (рис. 62). Величина угла резания зависит от обрабатываемого материала.

В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины. Благодаря такой форме трубы потери энергии на изменение направления течения в трубе оказываются минимальными и напор воды используется с максимальной производительностью.

Пропорциональность длины дуги спирали разности длин радиус-векторов используют при проектировании зубчатых колес с переменным передаточным числом. Для этого берут два квадрата, расположенных так, как показано на рисунке 63, и через середину и конец каждой

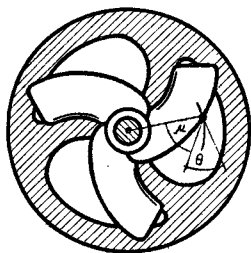


Рис. 62

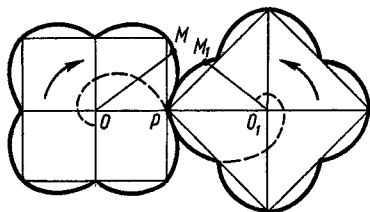


Рис. 63

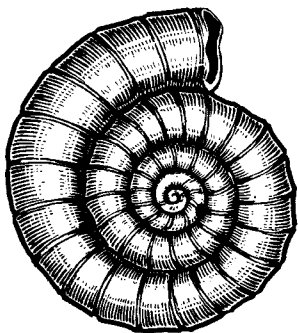


Рис. 64

стороны проводят дуги одинаковых логарифмических спиралей с полюсами в центрах квадратов, причем одна спираль закручивается по часовой стрелке, а другая — против часовой стрелки. Тогда при вращении этих квадратов дуги спиралей будут катиться одна по другой без скольжения. Передаточное же число, т. е. отношение угловых скоростей этих колес, будет непрерывно меняться, достигая в течение одного оборота колеса четыре

раза максимального значения и четыре раза минимального.

Живые существа обычно растут, сохраняя общее начертание своей формы. При этом чаще всего они растут во всех направлениях — взрослое существо и выше и толще детеныша. Но раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. А такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали или ее некоторым пространственным аналогам (рис. 64). Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, а также рога таких млекопитающих, как архары (горные козлы), закручены по логарифмической спирали. Можно сказать, что эта спираль является математическим символом соотношения формы и роста. Великий немецкий поэт Иоганн-Вольфганг Гёте считал ее даже математическим символом жизни и духовного развития.

По логарифмической спирали очерчены не только раковины — в подсолнухе семечки расположены по дугам, близким к логарифмической спирали и т. д. Один из наиболее распространенных пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает нити вокруг центра по логарифмическим спиралям. По логарифмическим спиралям закручены и многие галактики, в частности Галактика, которой принадлежит Солнечная система.

**Цепная линия.** Веревка, подвешенная за концы, телеграфный провод между двумя столбами, гибкие нерастяжимые нити провисают по одной и той же кривой, называемой *цепной линией*. Если стрелка провеса не слиш-

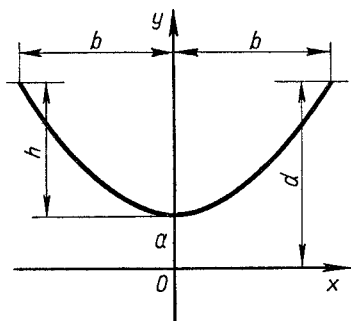


Рис. 65

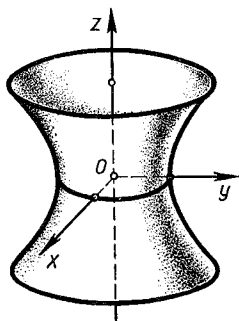


Рис. 66

ком велика, форма нити напоминает параболу. Поэтому Галилей полагал, что цепная линия совпадает с параболой. Это утверждение было опровергнуто Гюйгенсом, который доказал, что по параболе провисает цепь, весом которой можно пренебречь и которая поддерживает равномерно распределенный груз (например, цепной мост). Если же прогиб нити вызван ее собственной тяжестью, то форма нити задается уравнением

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right). \quad (1)$$

Здесь  $a = \frac{T_0}{q_l}$ , где  $T_0$  — натяжение нити в самой низкой точке, а  $q_l$  — ее линейная плотность. Эта линия изображена на рисунке 65.

При вращении линии (1) вокруг оси абсцисс получается поверхность, называемая *катеноидом* (от итальянского слова «катена» — цепочка). Она относится к так называемым *минимальным поверхностям*. Возьмем два сечения прямого кругового цилиндра плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра. Может показаться, что заключенная между ними часть цилиндра имеет наименьшую площадь по сравнению с другими поверхностями, проходящими через эти окружности. Однако это не так — поверхность катеноида, проходящего через те же окружности, имеет еще меньшую площадь. Более того, она имеет наименьшую площадь по сравнению со всеми поверхностями, проходящими через эти окружности. Форму катеноида (рис. 66) принимает мыльная пленка, ограниченная двумя кольцами.

**Периодические процессы и колебания.** Многие процессы, протекающие в окружающем нас мире, по истечении некоторого промежутка времени более или менее точно повторяются. В течение месяца Луна меняет свой облик, превращаясь из тонкого серпа сначала в полукруг, потом в полный диск, а затем снова убывая до полного исчезновения. Ежедневно мы видим, как восходит Солнце, движется по небосводу и заходит за горизонт, с тем чтобы на другое утро вновь появиться на востоке. А ночью звезды вращаются вокруг Полярной звезды, возвращаясь обратно по истечении суток. Более точные наблюдения показывают, что периодичность во вращении звезд и движении Солнца не совсем точна — из-за движения Земли вокруг Солнца за сутки вся картина неба чуть-чуть меняется. Поэтому летом видны созвездия, находящиеся зимой ниже горизонта. Но по прошествии года все звезды возвращаются на свои места и только планеты продолжают блуждание по созвездиям Зодиака (само название «планета» означает «странника»). Через 6585 дней и 8 часов повторяются солнечные и лунные затмения.

Не только на небесах можно наблюдать периодически повторяющиеся явления. Периодически разливаются реки, набегают на берег и отступают море, периодичны удары человеческого сердца и т. д. Некоторые периодические явления давно применялись для измерения времени. Но сердце бьется то чаще, то медленнее, разливы рек приходят то раньше, то позже, а небесные явления, которые происходят строго периодически, не видны в облачные или туманные ночи.

Этих недостатков лишены часы, если, конечно, регулярно заводить их. Но долгое время не удавалось достичь полной равномерности хода часов. Только после того, как Галилей, наблюдая за качаниями люстры в соборе, установил независимость их периода от размаха, удалось построить часы с маятником (поскольку карманных часов в то время не было, Галилею пришлось измерять промежутки времени ударами своего пульса).

Изучив колебания маятников, ученые перешли к более сложным механическим системам, таким, как струны, мембраны, стержни и пластинки. Трудность здесь заключалась в том, что положение маятника в каждый момент времени определяется одним числом — углом отклонения от вертикали нити, на которой он подвешен. Форма же струны задается бесконечным множеством чисел — отклонениями от положения равновесия каждой точки струны. Можно сказать, что при качании маятника меняется одно число, а при колебаниях струны — некоторая функция. Поэтому маятник — система с одной степенью свободы, а у струны их бесконечно много.

Несмотря на сложность проблемы, в XVIII и XIX веках Эйлер, Д. Бернулли, Даламбер и Фурье научились разбираться в таких колебаниях. После этого стали изучать еще более сложные процессы, например колебания жидкостей и газов (в частности, распространение звука). С помощью механических колебаний пытались объяснять даже распространение света. Тогда думали, что при этом происходят колебания особой среды — эфира, причем предполагали, что эфир, с одной стороны, абсолютно упруг, а с другой — не оказывает сопротивления движению планет. После того как Джеймс Максвелл, основываясь на гениальных идеях Майкла Фарадея, доказал электромагнитную природу света, стали думать, что эфир переносит электромагнитные волны. И только после создания теории относительности Эйнштейна выяснилось, что никакого эфира нет. Уравнения Максвелла можно записать в двух строчках, но они охватывают необозримое поле явлений. Через два десятка лет после того, как Максвелл написал эти уравнения, немецкий физик Генрих Герц научился экспериментально вызывать электромагнитные колебания, а еще через несколько лет замечательный русский физик А. С. Попов стал передавать их на большие расстояния. Так началась эра радио.

Колебания всевозможных видов окружают нас на

каждом шагу. Механические колебания применяются для скорейшей укладки бетона специальными виброукладчиками, для просеивания материалов на виброситах и даже для почти безболезненного высверливания отверстий в зубах. Акустические колебания нужны для приема и воспроизведения звука, а электромагнитные — для радио, телевидения, связи с космическими ракетами.

Электромагнитные колебания доносят до нас вести о сложнейших процессах, происходящих внутри звезд, о взрывах в отдаленных галактиках, о таких диковинных вещах, как пульсары (нейтронные звезды), черные дыры и т. д. С помощью электромагнитных колебаний советскими учеными были получены снимки обратной стороны Луны и вечно закрытой облаками Венеры. Такие колебания сопровождают и биологические процессы, например передачу возбуждения по нервной ткани, работу сердца и мозга. Записывая их, врачи получают электрокардиограммы и энцефалограммы. Как говорил создатель учения о биосфере академик В. И. Вернадский, «Кругом нас, в нас самих, всюду и везде, без перерыва, вечно сменяясь, совпадая и сталкиваясь, идут излучения разной длины — от волн, длина которых измеряется десяти-миллионными долями миллиметра, до длинных, измеряемых километрами».

Но колебания не всегда полезны. Вибрация станка действует на резец и обрабатываемую деталь и может привести к браку, вибрация жидкости в топливных баках ракеты угрожает их целостности, а вибрация самолетных крыльев при неблагоприятных условиях может привести к катастрофе. Даже хорошо затянутая гайка под влиянием вибрации ослабевает и станок разбалтывается. А самое страшное — под действием вибрации меняется внутренняя структура металлов, что приводит к так называемой усталости и последующему неожиданному разрушению конструкции. С колебаниями связаны случаи падения мостов, по которым шли в ногу воинские подразделения, разрушения мостов во время ураганов, катастрофы в кузнечных цехах, где несколько механических молотов начинали работать в такт, потому что колебания, вызванные работой одного из них, передавались остальным.

Таким образом, если колебания под контролем человека весьма полезны, то, вырвавшись из-под этого контроля, они превращаются в опасного врага. Но, чтобы не

выпустить их из-под наблюдения, чтобы знать, откуда может прийти опасность, надо уметь изучать колебания, знать их свойства. А здесь без математических расчетов не обойтись.

### **Числовые характеристики колебательных процессов.**

Несмотря на то что колебательные процессы очень важны, дать точное определение тому, что же следует называть колебаниями, довольно трудно. Неизмеримое количество различных видов колебаний затрудняет выделение черт, общих всем этим видам. Конечно, можно нарисовать волнистую линию, или сказать, что колебания — это нечто волнообразное, или, наконец, просто помахать рукой в воздухе, но вряд ли такие «пояснения» могут рассматриваться как строгие определения научного понятия.

Можно отметить, что в ходе колебаний величины меняются около некоторых средних значений и не уходят от них слишком далеко. Поэтому для численной характеристики колебаний нужно задавать числа, относящиеся не к одному моменту, а ко всему процессу. Для колебаний характерно изменение величин в двух противоположных направлениях. Поэтому, например, нельзя считать колебанием вращение спутника вокруг планеты — здесь движение совершается в одном и том же направлении. Но наблюдатель, находящийся в плоскости орбиты, увидит не вращение, а перемещения спутника то в одну, то в другую сторону, т. е. колебания. Вообще, если какая-нибудь точка вращается по замкнутой орбите, ее проекция на прямую линию совершает колебания.

Другой характерной чертой колебаний является их повторяемость. Иногда все величины, описывающие колебание, через некоторый промежуток времени принимают исходные значения. В этом случае говорят о *периодических колебаниях*, а наименьший период времени  $T$ , по истечении которого все «возвращается на круги своя», называют *основным периодом колебаний* (и вообще любого периодического процесса). Вместо периода  $T$  можно рассматривать обратную ему величину  $\nu = \frac{1}{T}$  — *частоту колебания*, показывающую, сколько раз повторяется данный процесс или данное колебание за единицу времени.

Приведем значения частот для некоторых встречающихся в природе периодических процессов (все частоты будем выражать в герцах).

Если правда, что через сотню миллиардов лет наблюдающееся сейчас расширение Вселенной сменится ее сжатием, причем этот процесс будет периодически повторяться, то эти колебания окажутся самыми медленными — их частота примерно  $10^{-19}$  — одно колебание за  $10^{19}$  с. Из тех явлений, в существовании которых ни у кого нет сомнений, самыми медленными являются вращения галактик — вряд ли найдутся силы, способные быстро закрутить миллиарды звезд. Наша Галактика совершает одно вращение в 250 млн. лет, т. е. примерно в  $10^{16}$  с. Поэтому частота этого процесса равна  $10^{-16}$  Гц.

Гораздо быстрее поворачиваются под влиянием взаимного притяжения планет их орбиты — частота здесь измеряется числом  $10^{-10}$  Гц. Частота обращения самих планет еще больше — порядка  $10^{-8}$  Гц. Частота изменения фаз Луны примерно равна  $4 \cdot 10^{-7}$  Гц, а приливы и отливы сменяются с частотой  $10^{-5}$  Гц. С частотой  $10^0$  Гц колеблется маятник, имеющий длину 1 м, и примерно с той же частотой меняют свою яркость пульсары. В электропроводах течет переменный ток, имеющий частоту 50 Гц. Частота акустических колебаний достигает значений  $10^4$  Гц. В радиотелеграфии применяют электромагнитные колебания с частотой  $10^5$ — $10^8$  Гц. Еще большую частоту (примерно  $10^{12}$  Гц) имеет инфракрасное излучение, вызываемое колебаниями сложных молекул. Частота порядка  $10^{14}$  Гц характеризует видимый оптический спектр (это излучение связано с перескоком электронов в атомах с одной орбиты на другую). Рентгеновы лучи имеют частоту  $10^{18}$  Гц, а гамма-лучи —  $10^{20}$  Гц. Таким образом, получается колоссальный диапазон частот от  $10^{-16}$  до  $10^{20}$  колебаний в секунду. Тем не менее ряд характерных закономерностей остается в силе на протяжении всей этой шкалы, например для приливов и для рентгеновских лучей.

Если колебательный процесс перемещается в пространстве, то возникают волны. За один период колебательный процесс, распространяющийся со скоростью  $v$ , перемещается на расстояние  $\frac{v}{\nu}$ , называемое *длиной волны* ( $\nu$  — частота колебаний).

Другой характеристикой колебательных процессов является их *амплитуда*, т. е. размах колебаний. Обычно амплитудой называют наибольшее отклонение колеблющейся величины от ее среднего значения. Амплитуда ко-



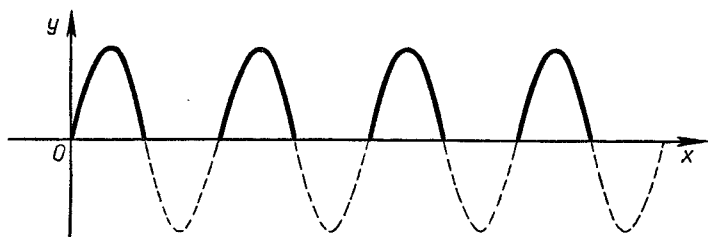


Рис. 67

лебательных процессов тоже меняется в гигантских диапазонах от миллиардов световых лет (если верна гипотеза пульсирующей Вселенной) до долей нанометров, т. е. примерно диаметра атома водорода.

Каждое колебание совершается около некоторого среднего положения. Иногда это среднее значение определяется без труда; не нужно сложных выкладок, чтобы понять, что маятник колеблется около своего положения равновесия. Но в других случаях трудно непосредственно найти *среднее значение* колеблющейся величины. Например, при детектировании колебаний (т. е. при пропускании колебаний в одну сторону и отсеке колебаний, имеющих противоположное направление) получается график, изображенный на рисунке 67. Здесь среднее значение положительно и меньше амплитуды колебаний, но указать, чему оно равно в точности, можно, лишь сделав некоторые выкладки.

Чтобы определить *среднее значение* периодически меняющейся величины, надо построить ее график на протяжении одного периода и найти такое число  $a$ , чтобы площадь прямоугольника с высотой  $a$  и основанием  $T$  равнялась площади между осью абсцисс и построенным графиком (рис. 68). Если часть графика окажется под осью абсцисс, то соответствующую часть площади берут

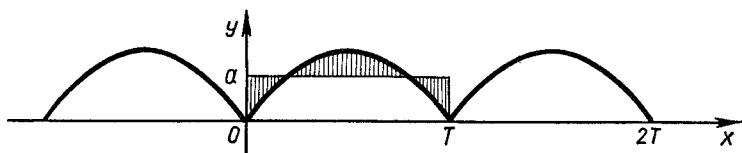


Рис. 68

со знаком «минус». Например, ясно, что среднее значение синусоидального колебания  $y = A \sin x$  равно нулю — площадь над осью абсцисс такая же, как и под этой осью. Среднее значение периодической функции  $y = f(x)$  выражается интегралом

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

**Из истории тригонометрии.** Иногда, когда практика ставит перед математикой новые задачи, приходится придумывать соответствующий математический аппарат заново. Но часто необходимый инструмент давно лежит на складе когда-то созданных методов и лишь за ненадобностью не востребовался или применялся совсем для иных целей.

Так случилось и с теорией периодических движений, в частности теорией колебаний. Оказалось, что самый удобный математический аппарат для описания этих движений получается, если применить давно известные тригонометрические функции. Но придумывали эти функции совсем для иных целей — они были нужны строителям и землемерам, астрономам и мореходам для расчета соотношений между сторонами и углами треугольников (само слово «тригонометрия» происходит от греческих слов «тригон» — треугольник и «метрео» — измеряю).

Древнегреческие астрономы составили подробные таблицы, показывающие зависимость длины хорды от центрального угла, и придумали, как вычислить с их помощью элементы треугольника. Подобные таблицы хорд были составлены Гиппархом, жившим в Александрии во II веке до н. э., и пополнены Менелаем (I век до н. э.) и знаменитым Птолемеем (II век н. э.). Эти таблицы были, по сути дела, таблицами синусов. С их помощью можно было решать не только прямолинейные, но и сферические треугольники, т. е. треугольники, образованные дугами больших кругов на сфере.

После того как древнегреческая математика пришла в упадок, эти исследования продолжили арабские ученые. В X веке живший в Дамаске астроном аль-Баттани ввел новые тригонометрические функции — *котангенс* и *секанс* и составил для них небольшие таблицы, а багдадский ученый Абу-ль-Вефа вывел целый ряд соотношений между тригонометрическими функциями. Однако и у

аль-Баттани, и у Абу-ль-Вефы тригонометрия была лишь методом решения астрономических задач, своеобразным введением в астрономию, а астрономия, в свою очередь, считалась лишь введением в... астрологию (тогда верили, что расположение звезд и планет влияет на людские судьбы).

Лишь в XIII веке живший в Иране математик Насреддин Туси стал изучать соотношения между сторонами и углами треугольников как самостоятельную область математики. Он создал общие методы решения косугольных треугольников, доказал теорему синусов и т. д.

К арабской математике восходит и название «синус». Поскольку синус равен половине хорды, его называли по-арабски словом «джиба», означающим тетиву лука. Но в арабской письменности используют лишь согласные буквы, а потому это слово писали так: «джб». Теми же согласными обозначается слово «джайб», которое означает «впадина, залив». Когда арабские рукописи стали переводить на латинский язык, переводчики не разобрались, что значит «джб», а так как по-латыни слово «залив» пишется «sinus», то они и назвали отношение катета к гипотенузе синусом.

**Гармонические колебания.** И у арабских математиков, и у европейских ученых XV—XVII веков синус выступал как половина длины хорды. Поэтому его величина зависела от длины радиуса круга. Только Эйлер впервые стал рассматривать синус как абстрактное число, не связанное ни с какими отрезками. Тем самым синус превратился в функцию числового аргумента. Это позволило применить тригонометрические функции к изучению колебаний. Одним из простейших видов колебаний является движение по оси проекции точки  $M$ , которая равномерно вращается по окружности. Закон этих колебаний имеет вид

$$x = R \cos \left( \frac{2\pi}{T} t + \alpha \right), \quad (1)$$

где  $R$  — радиус окружности,  $T$  — время одного оборота точки  $M$ , а число  $\alpha$  показывает начальное положение точки на окружности. Такие колебания называют *гармоническими* или *синусоидальными*.

Из равенства (1) видно, что амплитуда гармонических колебаний равна радиусу окружности, по которой движется точка  $M$ , а частота этих колебаний равна  $\frac{1}{T}$ .

Обычно вместо этой частоты рассматривают *циклическую частоту*  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , показывающую угловую скорость вращения, выраженную в радианах в секунду. В этих обозначениях имеем:

$$x = R \cos (\omega t + \alpha). \quad (2)$$

Число  $\alpha$  называют *начальной фазой колебания*.

Гармонические колебания можно выразить иначе, применив формулу для косинуса суммы двух углов:

$$x = R \cos \alpha \cos \omega t - R \sin \alpha \sin \omega t.$$

Если положить для краткости  $R \cos \alpha = C_1$ ,  $R \sin \alpha = -C_2$ , то получим, что

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (3)$$

Обратный переход от (3) к (2) очень прост — достаточно вынести  $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  за скобки и обозначить  $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  через  $R$ ,  $\frac{C_1}{R}$  через  $\cos \alpha$ , а  $-\frac{C_2}{R}$  через  $\sin \alpha$ .

Возможность задания гармонического колебания как числами  $R$  и  $\alpha$ , так и числами  $C_1$  и  $C_2$  в точности аналогична возможности задания точки на плоскости как полярными, так и декартовыми координатами. Более того, каждое гармоническое колебание  $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$  можно изобразить вектором, идущим из начала координат в точку  $M(C_1, -C_2)$ . Длина этого вектора равна амплитуде колебания, а угол между вектором и осью абсцисс равен начальной фазе колебания.

**Сложение колебаний.** Иногда одно и то же тело участвует в нескольких колебаниях. Например, каждый музыкальный инструмент в оркестре издает свой звук и тем самым вызывает свое колебание воздуха. Эти колебания складываются друг с другом и доносятся до нас в виде единого звука. Точно так же электромагнитные колебания, вызванные перестройками несметного множества атомов, складываются друг с другом и доносятся до нас в виде луча света.

Посмотрим, что получается, когда складываются два гармонических колебания. Здесь надо различать случай,

когда частоты складываемых колебаний одинаковы (например, когда две скрипки настроены в унисон) и когда эти частоты различны.

В первом случае при сложении получается колебание той же самой частоты. В самом деле, складываемые колебания можно представить в виде  $x_1 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$  и  $x_2 = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$ , а тогда при сложении получаем

$$x = x_1 + x_2 = (A_1 + B_1) \cos \omega t + (A_2 + B_2) \sin \omega t, \quad (1)$$

т. е. колебание той же частоты  $\omega$ .

Несложные подсчеты, использующие тригонометрические формулы, позволяют выразить амплитуду результирующего колебания через амплитуды  $R_1$  и  $R_2$  складываемых колебаний и разность  $\alpha_1 - \alpha_2$  их начальных фаз. Соответствующая формула имеет вид

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (2)$$

Если начальные фазы совпадают, то  $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 1$  и из формулы (2) получаем, что  $R = R_1 + R_2$ . Иными словами, при сложении колебаний с одинаковыми частотой и фазой их амплитуды складываются. Если же начальные фазы отличаются на  $\pi$ , т. е.  $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi$ , то  $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = -1$  и получаем, что  $R = |R_1 - R_2|$ . Иными словами, происходит вычитание амплитуд — в этом случае на горб одного колебания накладывается впадина второго и потому колебания гасят друг друга. В общем же случае амплитуда результирующего колебания лежит между разностью и суммой амплитуд складываемых колебаний.

Для наглядного изображения суммирования колебаний используют векторы: если колебанию  $x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$  поставить в соответствие вектор с координатами  $A_1$  и  $A_2$ , то окажется, что при сложении колебаний изображающие их векторы тоже складываются.

При сложении противоположно направленных колебаний может даже случиться так, что в сумме получится не колебание, а покой. Энергия гармонических колебаний пропорциональна квадрату их амплитуды. Поэтому при сложении двух одинаковых колебаний их энергия увеличивается не в два, а в четыре раза. Если колебания противоположно направлены и имеют равные амплитуды, то получаем нулевое колебание, а если амплитуды различны — колебание с небольшой энергией.

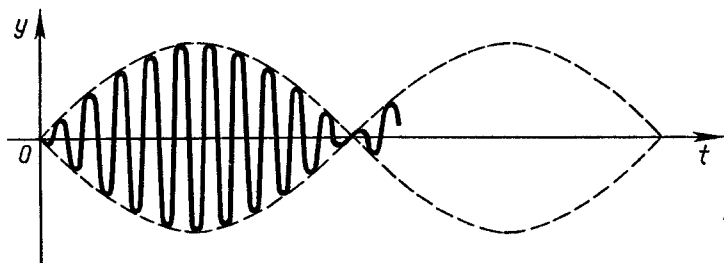


Рис. 69

**Биеия.** Довольно сложная картина получается, когда складывают колебания с различными частотами. При сложении, например, колебаний  $x_1 = A \cos \omega t$  и  $x_2 = A \cos \Omega t$  получаем колебание

$$x = x_1 + x_2 = A (\cos \omega t + \cos \Omega t) = 2A \cos \frac{\omega + \Omega}{2} t \cos \frac{\omega - \Omega}{2} t.$$

Если частоты  $\omega$  и  $\Omega$  мало отличаются друг от друга, то множитель  $\cos \frac{\omega - \Omega}{2} t$  изменяется весьма медленно, а множитель  $\cos \frac{\omega + \Omega}{2} t$  имеет почти ту же частоту, что и складываемые колебания. Такие колебания называют **биеиями** (рис. 69). Их иногда несколько неточно, но наглядно описывают как гармонические колебания с медленно меняющейся амплитудой. Аналогичная картина получается, если амплитуды колебаний различны, только в этом случае **фаза** суммарного колебания тоже медленно изменяется.

Иногда мы не можем воспринять слагаемых колебаний из-за того, что их частота слишком велика, но замечаем медленное изменение амплитуды суммарного колебания. Например, если электрическая лампочка присоединена к динамо-машине, дающей переменный ток с периодом  $T = \frac{1}{50}$  с, то изменения в яркости лампочки будут незаметными. Если же присоединить эту лампочку к двум динамо-машинам, периоды которых мало отличаются друг от друга, то возникнут биеия и лампочка начнет мигать.

Возникают биеия и на двухвинтовом корабле, если

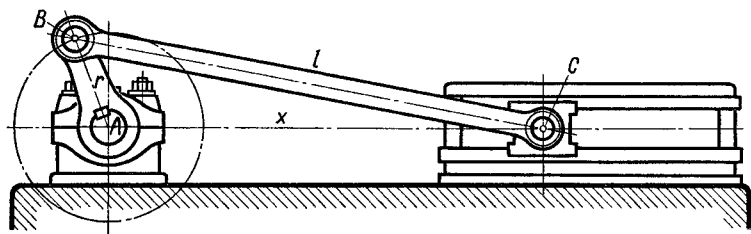


Рис. 70

винты имеют близкие, но различные периоды вращения. Колебания с периодически меняющейся амплитудой применяют в радиотехнике. Радиостанции посылают в пространство электромагнитные колебания с частотой до 15 МГц (т. е. до 15 млн. колебаний в секунду). Амплитуда же этих колебаний меняется со звуковой частотой (несколько сотен или тысяч колебаний в секунду).

Интересный пример биений дают океанские приливы и отливы. Из-за притяжения Луны и Солнца уровень воды в океане все время меняется. Примерно через каждые 12 ч уровень воды достигает наивысшего значения, через 6 ч после этого — наинизшего. Однако из-за вращения Луны вокруг Земли период колебаний уровня воды, вызываемых притяжением Солнца, не совпадает с периодом колебаний, вызванных притяжением Луны. Первый период равен 12 ч, а второй — 12 ч 45 мин. В результате сложения этих колебаний, имеющих близкие периоды, получаются биения. Самая большая высота приливов превосходит самую малую примерно в 2,7 раза.

**Кривошипно-шатунный механизм.** На рисунке 70 изображен кривошипно-шатунный механизм, в котором кривошип  $AB$  связан с ползуном  $C$  с помощью шатуна  $BC$ . При равномерном вращении кривошипа ползун совершает негармонические колебания. Пусть угловая скорость вращения кривошипа равна  $\omega$ , его длина  $r$ , а длина шатуна —  $l$ . Тогда в момент времени  $t$  кривошип образует с горизонтальным направлением угол  $\omega t$ . Из рисунка 70 находим, что

$$x = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t} = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \omega t}. \quad (1)$$

Обычно отношение  $\frac{r}{l}$  невелико (примерно  $\frac{1}{5}$ ), а при малых значениях  $\alpha$  можно заменить  $\sqrt{1+\alpha}$  на  $1 + \frac{\alpha}{2}$ . Поэтому можно приближенно заменить сложное колебание (1) выражением

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega t + \left( l - \frac{r^2}{2l} \sin^2 \omega t \right) = \\ &= \left( l - \frac{r^2}{4l} \right) + r \cos \omega t + \frac{r^2}{4l} \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых описывают гармоническое колебание с циклической частотой  $\omega$  относительно точки

$$l - \frac{r^2}{4l},$$

а третье — гармоническое колебание с вдвое большей частотой.

**Спектральный анализ колебаний.** Разложение сложных колебаний в сумму нескольких (и даже бесчисленного множества) гармонических колебаний широко применяется в физике. Его называют *спектральным анализом*. Частоты синусоидальных колебаний, получающихся при разложении, называют *спектром* данного колебания.

Эти названия не случайны. Разложение луча света в спектроскопе связано с тем, что различные составляющие луча имеют разные частоты, и потому их коэффициенты преломления различны. Поэтому спектральный анализ луча показывает, каковы частоты колебаний, из которых он состоит.

Спектральный анализ является могучим средством исследования атомов, молекул и атомных ядер. Каждая линия спектра соответствует определенной частоте колебаний, а ее интенсивность показывает энергию колебания с такой частотой. Изучая энергии колебаний различных частот, можно сделать выводы о причинах этих колебаний, т. е. о строении колеблющегося тела.

**Спектральный анализ функций.** Математическим аппаратом спектрального анализа служит разложение функций в ряды по тригонометрическим функциям

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n x + \alpha_n). \quad (1)$$



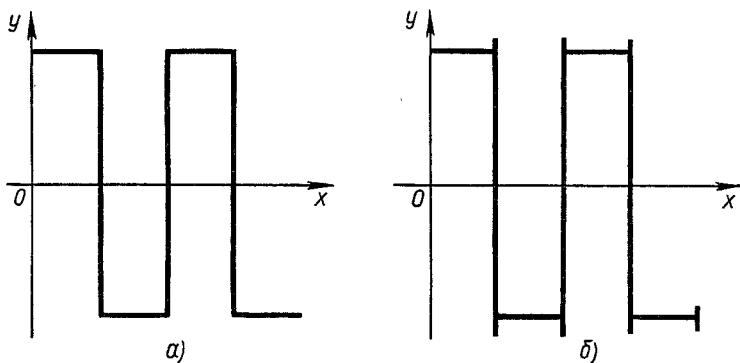


Рис. 71

Конечно, сложить бесконечно много слагаемых невозможно. Поэтому равенство (1) понимают так: если сложить достаточно много слагаемых, то полученная сумма будет почти неотличима от функции  $f(x)$ .

Если разлагаемая функция имеет период  $T$ , то естественно брать и слагаемые с тем же периодом. Для этого все циклические частоты  $\omega_n$  должны быть пропорциональны основной частоте  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , т. е. ряд (1) должен иметь вид

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega x + \alpha_n). \quad (2)$$

Это — знакомые нам ряды Фурье (см. с. 21).

Для разложения периодических колебаний на синусоидальные составляющие применяют различные машины. Есть машины, которые решают и обратную задачу — позволяют из синусоидальных составляющих получать все колебание, т. е. находить (конечно, с известным приближением) сумму всего бесконечного ряда (2). Однажды для проверки работы такой машины ей дали разложить на синусоидальные составляющие колебание, график которого изображен на рисунке 71, а, а потом предложили сложить все полученные гармонические колебания. Машина после суммирования нарисовала не такой график, как на рисунке 71, а, а такой, как на рисунке 71, б, т. е. с добавочными хвостиками. Сначала

появление этих хвостиков приписывали несовершенству машины и думали, как ее исправить. Но потом американский физик Дж. Гиббс доказал, что такие хвостики должны появляться всегда, когда у графика колебания есть разрыв. Теорему назвали его именем (явление Гиббса), хотя «открыла» ее машина.

**Практические приложения спектрального анализа.** Со спектральным анализом колебаний приходится иметь дело не только в оптике, но и вопросах телефонии и телеграфии. Когда проложили телеграфный кабель через Атлантический океан, то оказалось, что по нему нельзя передавать телеграммы. Вместо точек и тире на другом конце кабеля получались совершенно непонятные сигналы. Исследованием работы кабеля занялся Кельвин. Для этого он сначала разложил сигналы на синусоидальные составляющие и изучил, как они передаются по кабелю. Оказалось, что колебания различной частоты при этом затухают неодинаково, да и скорость их распространения различна. Когда они приходят на другой конец кабеля, их сумма становится совсем непохожей на переданный сигнал. Кельвин не только выяснил причину, мешавшую передавать телеграммы, но и придумал, как ее устранить. Когда по его указаниям переделали кабель, сигналы стали передаваться без искажений и трансатлантическая связь наладилась.

**Гармонические колебания и восстанавливающая сила.** До сих пор мы занимались гармоническими колебаниями лишь с точки зрения кинематики — выясняли, как перемещаются колеблющиеся точки, как складываются друг с другом колебания и т. д. Но для того чтобы знать, где можно встретить гармонические колебания, от чего зависят их частоты и амплитуды, надо выяснить, какие же силы их вызывают.

Вернемся снова к равномерному движению точки по окружности. Если ее угловая скорость равна  $\omega$ , а масса  $m$  и если радиус окружности равен  $R$ , то на точку действует сила  $F = m\omega^2 R$ , направленная к центру окружности (рис. 72). Проекция  $F_x$  этой силы на горизонтальную ось равна  $-m\omega^2 R \cos \varphi$ . Но  $x = R \cos \varphi$  — это отклонение колеблющейся по оси точки  $N$  (проекции точки  $M$ ) от точки  $O$ , и потому  $F_x = -m\omega^2 x$ . Мы пришли, таким образом, к следующему результату, который является основным в динамике колебаний:

*Гармонические колебания вызываются силой, пропор-*

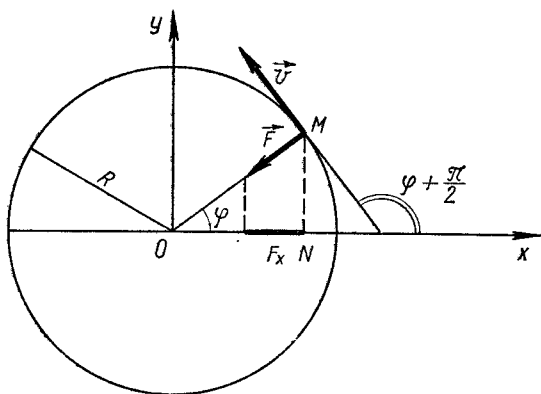


Рис. 72

циональной смещению колеблющейся точки от положения равновесия и направленной в сторону, противоположную этому смещению.

Таким образом, при гармонических колебаниях имеем  $F = -kx$ . Существует простая зависимость между циклической частотой колебаний  $\omega$ , массой  $m$  колеблющейся точки и коэффициентом  $k$ . Чтобы установить эту связь, снова рассмотрим проекцию равномерно вращающейся точки. В этом случае действующая сила равняется  $m\omega^2 x$ , а это значит, что  $k = m\omega^2$ , т. е.  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Такая же

зависимость имеет место и в общем случае. Чем больше значение  $k$ , т. е. чем больше сила, возвращающая колеблющуюся точку в положение равновесия, тем больше частота колебаний, а при увеличении массы точки частота колебаний уменьшается. Это же справедливо и в случае колебаний более сложных систем, например для струны: чем сильнее натянута струна, тем выше тон ее звучания, чем толще струна, тем ее тон ниже.

Теперь уже легко объяснить, почему в упругих телах возникают гармонические колебания. Дело в том, что по закону Гука сила упругости пропорциональна отклонению от положения равновесия: чем сильнее растянута пружина, тем больше сила, стремящаяся сжать ее. Отсюда видно, как можно получить гармонические колебания. Подвесим гирию массы  $m$  на пружине. Под действием силы тяжести гири пружина растянется, и гирия займет

некоторое положение равновесия. Если теперь оттянуть гирию вниз и отпустить ее без начальной скорости, то она будет совершать гармонические колебания около положения равновесия с циклической частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , где  $k$  — жесткость пружины (коэффициент  $k$  в законе Гука  $F = -kx$ ). Эти колебания имеют, вообще говоря, вид  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ . Чтобы найти значения  $A$  и  $\alpha$ , надо использовать начальные условия, согласно которым в начальный момент времени, т. е. при  $t = 0$ , гирия находилась на расстоянии  $x_0$  от положения равновесия и не имела начальной скорости. Этим условиям удовлетворяет лишь решение, для которого  $A = x_0$  и  $\alpha = 0$ , т. е.  $x = x_0 \cos \omega t$ .

Если бы мы не оттягивали гирию вниз, а толкнули ее вниз с начальной скоростью  $v_0$ , когда она находилась в положении равновесия, то получили бы колебания по закону  $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ . Амплитуда этих колебаний пропорциональна начальной скорости  $v_0$  и обратно пропорциональна  $\omega$ , т. е.  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ . Это понятно — чем больше начальная скорость, тем больше будет и размах колебаний. С другой стороны, чем жестче пружина, тем скорее она оставит опускающуюся гирию. А если гирия массивна, то ее инерция будет настолько велика, что при той же начальной скорости отклонение увеличится.

Разумеется, проведенное выше исследование содержало много неявных предположений. Например, мы предполагали, что вся пружина равномерно растягивается, и пренебрегли ее массой. Если бы при оттягивании гири вниз мы придерживали на месте середину пружины, весь ход колебаний был бы иным.

**Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.** При отыскании силы, вызывающей гармонические колебания, был использован второй закон Ньютона. Рассмотрим вопрос с иной стороны — напомним дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Для этого придется научиться дифференцировать тригонометрические функции вида  $x = R \cos(\omega t + \alpha)$ .

Снова возьмем точку  $M$ , вращающуюся по окружности радиуса  $R$  с угловой скоростью  $\omega$ . В каждый момент времени  $t$  вектор  $\vec{v}$  скорости этой точки направлен по касательной к окружности (т. е. перпендикулярен радиусу, проведенному в точку касания) и имеет длину  $\omega R$ .

Но тогда проекция вектора  $\vec{v}$  на ось абсцисс выражается формулой

$$v_x = \omega R \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -\omega R \sin \varphi = -\omega R \sin (\omega t + \alpha)$$

(см. рис. 72). Это значит, что мгновенная скорость точки  $N$ , совершающей гармонические колебания по закону  $x = R \cos (\omega t + \alpha)$ , выражается формулой  $v_x = -\omega R \sin (\omega t + \alpha)$ . Так как мгновенная скорость равна производной от координаты, то

$$(R \cos (\omega t + \alpha))' = -\omega R \sin (\omega t + \alpha).$$

В частности, при  $R = 1$  и  $\alpha = 0$  получаем

$$(\cos \omega t)' = -\omega \sin \omega t.$$

Точно так же, рассматривая проекцию точки и вектора скорости на ось ординат, получаем, что

$$(\sin \omega t)' = \omega \cos \omega t.$$

Ускорение — это производная от скорости. Поэтому ускорение при гармоническом колебании выражается так:

$$a_x = v_x' = (-\omega R \sin (\omega t + \alpha))' = -\omega^2 R (\cos \omega t + \alpha).$$

Если вспомнить, что  $R \cos (\omega t + \alpha)$  — абсцисса точки  $N$ , колеблющейся по оси  $Ox$ , то это равенство переписывается так:  $a_x = -\omega^2 x$ .

Чтобы найти ускорение, надо продифференцировать скорость. Но скорость, в свою очередь, получилась при дифференцировании координаты по времени. Значит, ускорение — вторая производная координаты по времени  $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = x''$ . Поэтому найденное выше выражение для ускорения гармонического колебания означает, что  $x'' = -\omega^2 x$ .

Это уравнение — лишь иная запись известного нам факта, что гармонические колебания вызываются силой, пропорциональной отклонению от положения равновесия. Но все же оно имеет более общий, более абстрактный вид, чем прежняя формулировка. Теперь можно рассматривать не только механические колебания, но и любые

процессы, в которых ускорение изменения величины пропорционально этой величине и обратно ей по знаку. А такие процессы встречаются очень часто. Например, если закрутить диск, подвешенный на упругой нити, то он начнет раскручиваться, причем скорость вращения будет увеличиваться. Пройдя положение равновесия, диск начнет замедлять ход, закручивая нить в обратную сторону. В результате получаются так называемые *крутильные колебания*. Можно доказать, что угловое ускорение при таких колебаниях пропорционально углу закручивания и обратно ему по знаку. Это значит, что угол закручивания будет изменяться по уже известному нам закону  $\varphi = A \cos(\omega t + \alpha)$ .

А если замкнуть электрическую цепь с емкостью  $C$  и самоиндукцией  $L$ , то в ней возникнет переменный ток. Из законов электрического тока можно вывести, что ток в цепи тоже будет меняться по формуле  $I = A \cos(\omega t + \alpha)$ , где  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .

**Колебания маятника.** Не всегда наблюдается точная пропорциональность ускорения и координаты. И качающаяся люстра в соборе, на которую смотрел Галилей, и маятник часов, и дохлая крыса, которую раскачивал на веревке Том Сойер, с точки зрения физики являются одним и тем же — физическим маятником. Для простоты изучения можно заменить в каждом случае качающееся тело материальной точкой с той же массой, сосредоточив ее в центре тяжести этого тела, пренебречь сопротивлением воздуха, гибкостью и растяжимостью нити и, наконец, трением в точке подвеса нити. Если сделать все эти упрощения, то получим идеализированную схему, которую называют *математическим маятником*.

Разумеется, закон колебания этого идеализированного объекта отличается от того, который получился бы при точном учете всех сторон явления. Но, как пишет известный английский специалист в области колебаний Р. Бишоп, «инженеры должны знать, что откровенно приближенные теории, как правило, гораздо более полезны, чем усложненные теории с большими претензиями на точность». Чтобы написать дифференциальное уравнение колебаний математического маятника, надо заметить, что тангенциальное ускорение (т. е. ускорение, направленное по касательной) равно  $l\varphi''$ , где  $l$  — длина нити, на которой подвешен маятник, а  $\varphi$  — угол отклонения

этой нити от вертикали. Проекция же силы тяжести на направление касательной равна  $-mg \sin \varphi$ . Поэтому по второму закону Ньютона получаем, что  $ml\varphi'' = -mg \sin \varphi$ , а потому

$$\varphi'' = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (1)$$

Это и есть дифференциальное уравнение колебаний математического маятника. Оно не совпадает с уравнением гармонических колебаний — ускорение оказалось пропорциональным не самому углу  $\varphi$ , а его синусу. Но синусы малых углов почти равны радианной мере этих углов,  $\sin \varphi \approx \varphi$ , а потому уравнение (1) при малых углах размаха можно заменить упрощенным:

$$\varphi'' = -\frac{g}{l} \varphi.$$

Его мы уже умеем решать:  $\varphi = A \cos(\omega t + \alpha)$ , где  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Период этих колебаний равен  $\frac{2\pi}{\omega}$ , т. е.  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Он зависит от длины нити  $l$  и от ускорения силы тяжести  $g$ , но не зависит ни от амплитуды колебаний, ни от массы колеблющейся точки.

Из равенства  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  видно, что период колебаний увеличивается с увеличением длины маятника. Поэтому в старинных часах надо было время от времени регулировать длину маятника, чтобы выправить их ход. Но если перевезти даже очень хорошо отрегулированные часы с маятником из полярной области в экваториальную, они начнут отставать. Около экватора сила тяжести из-за центробежной силы и увеличения длины земного радиуса меньше, чем около полюса, и потому значение  $g$  меньше, а значение  $T$  больше.

Период колебаний маятника длины 1 м почти равен 2 с. Иными словами, качание в одну сторону такой маятник делает примерно за 1 с. Поэтому, когда после революции 1789 года во Франции стали разрабатывать метрическую систему мер, длина такого «секундного» маятника конкурировала с сорокаmillionной долей длины земного меридиана на роль основной единицы длины.

**Вынужденные колебания. Резонанс.** Исстари звучали над Русью колокола. Колокольный звон был слышен и в праздники, и в дни вражеского нашествия, и во время народных восстаний. Но раскачать тяжелый язык многопудового колокола совсем непросто — надо попасть в такт его собственным колебаниям. Только тогда получается должный размах и колокол начинает звонить на всю округу.

Такие колебания, при которых колеблющееся тело движется под действием внешней силы, называют *вынужденными колебаниями*. Рассмотрим случай, когда вынуждающая колебания сила сама изменяется по синусоидальному закону  $F_{\text{вын}} = B \cos \Omega t$ . Такая сила тащит колеблющееся тело то в одну сторону, то в другую. Будем считать, что, кроме этой силы, действует еще восстанавливающая сила, пропорциональная отклонению от положения равновесия. Тогда полная сила  $F$ , вызывающая колебания, равна  $-kx + B \cos \Omega t$ . По второму закону Ньютона получаем, что  $F = ma$ , или, поскольку  $a = x''$ ,

$$mx'' = -kx + B \cos \Omega t. \quad (1)$$

Это и есть *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний*.

Мы не будем описывать, как оно решается, а сразу запишем ответ:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{B}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t.$$

Здесь  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , а  $A$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий. Например, если в начале колебаний тело покоилось в положении равновесия, т. е. если  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ , то решение имеет вид

$$x = \frac{B(\cos \Omega t - \cos \omega t)}{m(\omega^2 - \Omega^2)}. \quad (2)$$

График получающегося колебания имеет довольно сложный вид — его амплитуда то увеличивается, то уменьшается. Из формулы (2) легко вывести, что наибольшая амплитуда (получающаяся, если  $\cos \Omega t = -\cos \omega t = 1$ ) равна  $\frac{2B}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$ . Поэтому для значений  $\Omega$ , мало отличающихся от  $\omega$  (т. е. при раскачивании в такт собствен-



ным колебаниям), амплитуда может стать очень большой — примерно  $\frac{B}{m\omega|\omega-\Omega|}$ .

Особенно интересен случай, когда частота  $\Omega$  возбуждающей силы совпадает с частотой  $\omega$  собственных колебаний. Здесь уже нельзя применять формулу (2), так как и числитель, и знаменатель этой формулы обращаются в нуль. Но в математике разработаны способы вычисления пределов выражений, имеющих такой вид. Для этого надо заменить разность  $\cos\Omega t - \cos\omega t$  на  $2\sin\frac{\Omega+\omega}{2}t \cdot \sin\frac{\omega-\Omega}{2}t$  и заметить, что при малых значениях  $\omega - \Omega$  выражение  $\sin\frac{\omega-\Omega}{2}t$  почти равно  $\frac{\omega-\Omega}{2}t$ . Тогда, сокращая числитель и знаменатель дроби на  $\omega - \Omega$  и переходя к пределу при  $\Omega \rightarrow \omega$ , получим:

$$x = \frac{Bt \sin \omega t}{m\omega}. \quad (3)$$

В отличие от всех разобранных выше случаев, когда размах колебаний был ограничен, здесь он неограниченно возрастает из-за множителя  $t$ . Разумеется, это надо рассматривать лишь как математическую идеализацию реальных процессов — когда амплитуда колебаний становится слишком большой, теряют силу упрощающие предположения, при которых выведена формула (3), а, кроме того, возникающие силы становятся настолько большими, что разрушают колеблющееся тело.

Увеличение амплитуды, вызванное близостью частот возбуждающей силы и собственных колебаний, называют *резонансом*. Это слово по-латыни означает «дающий отзвук». Впервые явление резонанса было замечено для акустических колебаний — при пении или ударе по струне гитары начинал звучать соответственно настроенный камертон. Дело в том, что акустические колебания состоят из многих гармоник, и если частота хотя бы у одной из них совпадает с частотой собственных колебаний камертона, он дает отзвук.

Однако вскоре резонанс заинтересовал людей, совсем не обладавших музыкальным слухом настройщиков роялей. Когда появились станки с быстро вращающимися частями, паровые турбины и т. д., начали происходить необъяснимые катастрофы. При какой-то скорости вращения станок содрогался с такой силой, что обрабаты-  
вае-

мая деталь шла в брак, а в наихудшем случае сам станок, разлетался на части. Такие же катастрофы возникали с турбинами — при плохой центровке возникала центробежная сила, периодически раскачивающая опоры. И если частота изменений этой силы (зависящая от скорости вращения турбины) попадала в такт собственным колебаниям опор, начинались резонансные колебания. Такие колебания чрезвычайно опасны для самолетов и ракет. Ведь самолет состоит из многих тысяч частей, каждая из которых имеет собственную частоту колебаний. Работа моторов вызывает вибрацию всего самолета, и если частота хотя бы одной из гармоник этой вибрации совпадает с частотой колебаний какой-нибудь детали, могут возникнуть разрушения. Разумеется, перед строительством самолет рассчитывают на устойчивость относительно таких колебаний, тщательно устраняя все возможные резонансы. Но сложность конструкции самолета такова, что необходимо испытывать образцы новых конструкций в воздухе.

Весьма опасным оказался резонанс для подвесных мостов — они иногда рушились, когда по ним проходили в ногу воинские подразделения. В 1831 году рухнул Браунтонский мост в Манчестере, по которому шли 60 солдат. Страшная катастрофа произошла во Франции, когда батальон в 500 человек, шедший в ногу по Анжерскому подвесному мосту, так чеканил шаг, что мост стал раскачиваться в такт их маршу и обрушился в пропасть; при этом погибло 226 солдат.

Но резонанс имеет и полезные стороны. Без настройки радиоприемника в резонанс с несущей частотой радиопередачи мы не услышали бы ни звука.

**Затухающие колебания.** Для того чтобы возникающие в конструкциях колебания не оказывали столь вредного действия, их стараются погасить, или, как говорят инженеры, *демпфировать*. Заглушать колебания нужно автоконструкторам — иначе колебания корпуса на рессорах длились бы слишком долго. Стремятся погасить акустические колебания архитекторы, так как иначе в наши домашние беседы могли бы включаться соседи, живущие на несколько этажей выше. Еще острее стоит проблема демпфирования колебаний перед строителями в сейсмоопасных районах.

Для того чтобы погасить колебания, применяют различные способы: погружение колеблющегося тела в вяз-

кую жидкость (например, в масло), применение материалов с высоким уровнем рассеяния энергии, покрытие панелей специальными составами, замену сплошных плит слоистыми (в них колебания быстрее затухают), различные пенопластные и резиновые прокладки и т. д.

Мы рассмотрим сейчас лишь первый способ демпфирования, т. е. погружение колеблющегося тела в вязкую жидкость. Из личного опыта каждый знает, что при быстром беге сопротивление воздуха возрастает. Будем считать, что сопротивление среды пропорционально скорости движения. Конечно, как и многие сделанные выше предположения, эта гипотеза представляет собой лишь грубое приближение к действительности — на самом деле зависимость сопротивления среды от скорости движения сложнее. Но мы хотим получить лишь качественную картину, а в этом случае полезно так упростить задачу, чтобы она легко решалась.

Вообще, при изучении нового явления полезно сначала сделать предположения, выполняющиеся лишь весьма приближенно, но зато облегчающие решение задачи. Решив упрощенную задачу, получают общее представление о закономерностях данного явления, позволяющее грубо описать ход процесса. Разумеется, при этом упускаются многие тонкости, которые подвергаются изучению на следующем этапе. В настоящее время процесс исследования намного сокращается путем применения быстродействующих электронных машин, однако и теперь интуиция ученого, позволяющая ему построить упрощенную модель явления, отбросить маловажные факторы и учесть существенные, не потеряла своего значения.

Итак, рассмотрим материальную точку массы  $m$ , движущуюся по прямой линии и находящуюся под действием двух сил: восстанавливающей силы, пропорциональной отклонению точки от положения равновесия и стремящейся возратить точку к этому положению, и силы сопротивления среды, пропорциональной скорости движения и направленной в сторону, противоположную скорости. Тогда  $F_{\text{восст}} = -k_1x$ ,  $F_{\text{сопр}} = -k_2v$ , а общая сила  $F$ , действующая на нашу точку, равна  $-k_1x - k_2v$ .

По второму закону Ньютона получаем, что  $ma = F = -k_1x - k_2v$ . Если вспомнить, что ускорение  $a = x''$ , скорость  $v = x'$ , то это равенство можно записать в следующем виде:

$$x'' + 2\delta x' + \omega^2 x = 0$$

(мы перенесли все члены в левую часть уравнения, разделили обе части уравнения на  $m$  и положили для краткости  $\frac{k_2}{m} = 2\delta$ ,  $\frac{k_1}{m} = \omega^2$ ).

Если  $\delta = 0$ , т. е. если сопротивления среды нет, то точка будет совершать гармонические колебания с циклической частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ . Если же  $\delta \neq 0$ , но  $\delta < \omega$ , то закон движения точки имеет вид

$$x = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ . Таким образом, сопротивление среды оказывает двойное влияние. Во-первых, циклическая частота колебаний уменьшается — вместо  $\omega$  она становится равной лишь  $\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ . Во-вторых, из-за появившегося множителя  $e^{-\delta t}$  размах колебаний с течением времени уменьшается, так как  $e^{-\delta t}$  стремится к нулю, когда  $t$  стремится к бесконечности. При этом в течение одного периода, т. е. за промежуток времени  $\left[0, \frac{2\pi}{\omega_1}\right]$ , амплитуда колебаний уменьшается в  $e^{\frac{2\pi\delta}{\omega_1}}$  раз. Число  $d = \frac{2\pi\delta}{\omega_1}$  называют **логарифмическим декрементом** затухающих колебаний. Чем он больше, тем быстрее затухают колебания. Через некоторое время амплитуда колебаний станет настолько малой, что даже очень чувствительные приборы не позволят их уловить. График затухающих колебаний изображен на рисунке 73.

Иной характер имеет движение, если сопротивление

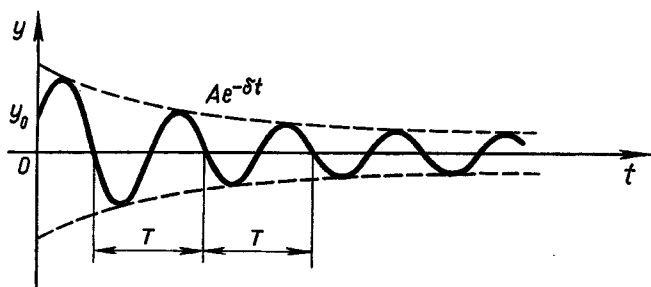


Рис. 73

среды настолько велико, что  $\delta > \omega$  (например, если колебания маятника происходят не в воздухе, а в какой-нибудь жидкости). В этом случае движущееся тело будет не колебаться, а медленно приближаться к положению равновесия.

**Моделирование.** Описывая механические колебания, мы несколько раз упоминали и об электрических колебаниях. Хотя физическая картина этих явлений различна, они описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями. Надо только вместо массы брать заряд, вместо скорости — силу тока, вместо сопротивления среды — сопротивление проводника, вместо жесткости пружины — индуктивность катушки и т. д. Если различные явления описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, то можно моделировать одни явления другими, т. е. изучать явления, наблюдая другие. Пусть, например, надо выяснить, как будет двигаться под землей нефть в районе буровых скважин. Так как наблюдать подземное движение нефти затруднительно, пользуются тем, что уравнения движения жидкости такие же, как и движения электрических зарядов. Поэтому собирают электрическую цепь, в которой движение электрических зарядов подчинено тем же условиям, что и изучаемое движение нефти.

Измеряя напряжение и ток в различных точках собранной цепи, можно узнать, где выгоднее всего поставить буровую вышку, куда надо накачивать воду, чтобы усилить выход нефти, и т. д. К моделированию явлений прибегают во многих случаях. При этом надо, конечно, следить, чтобы оба явления действительно имели одно и то же математическое описание.

## КАК СТАЛ РАБОТАТЬ «ГИБРИД МЕЖДУ БЫТИЕМ И НЕБЫТИЕМ»

**Б**есполезная красота. Уже древние индусы знали, что не все квадратные уравнения решаются. Например, нельзя найти такое число  $a$ , что  $a^2 + 2a + 26 = 0$ . Но и они, и арабские математики, много занимавшиеся теорией уравнений, относились к этому спокойно — не все же на свете имеет решение. Но после того, как в XVI веке Тарталья, о котором мы уже рассказывали раньше, вывел формулу для решения кубического уравнения  $x^3 + px + q = 0$ , обнаружились совсем удивительные вещи.

Оказалось, что для получения действительных корней уравнения надо извлекать квадратные корни из отрицательных чисел! Чтобы разобраться в возникших осложнениях, пришлось выйти за рамки множества действительных чисел и ввести числа новой природы. Они имели вид  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа, а  $i$  — число, квадрат которого равен  $-1$ ,  $i^2 = -1$ . Поскольку такие числа не могут быть ни положительными, ни отрицательными, их считали «софистическими», т. е. слишком хитроумными. Теперь такие числа называют *комплексными*.

Впервые о них упомянул в своей книге итальянский ученый Кардано (1501—1576), но он уделил им мало внимания. Гораздо подробнее написал о них его младший современник Бомбелли (1526—1573). Хотя по основной специальности он был инженером-гидравликом, но интересовался алгеброй и написал о ней книгу, увидевшую свет в 1572 году. В этой книге Бомбелли рассмотрел правила действий над комплексными числами и показал, что арифметические операции над ними снова дают комплексные числа, например:

$$(3 + 4i) + (7 - 6i) = 10 - 2i,$$

$$(5 + 8i)(2 - 3i) = 10 + 16i - 15i - 24i^2 = 34 + i,$$

$$\frac{3+2i}{4-3i} = \frac{(3+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{6+17i}{25} = \frac{6}{25} + \frac{17}{25}i.$$

После выхода книги Бомбелли комплексные числа стали применять в различных областях алгебры. Их применение позволило сформулировать многие законы алгебры в общем виде, что было невозможно, пока ограничивались лишь действительными числами. Например, теперь можно было говорить, что у квадратного уравнения всегда есть два корня, а у кубического — три корня. Поэтому математики пришли к выводу, что уравнение  $r$ -й степени всегда имеет  $r$  корней (при этом некоторые корни приходилось считать несколько раз, как, например, корень 2 для уравнения  $x^2 - 4x + 4 = 0$ ).

Однако вся эта красота казалась не слишком нужной — никаких приложений к практике комплексные числа тогда не имели. Лейбниц называл их даже «гибридом между бытием и небытием», так как они существовали, но не выражали никакие зримые величины. Но в математике бесполезной красоты не бывает. Красивая математическая теория, которая сейчас кажется далекой от практики, рано или поздно понадобится для самых неожиданных приложений. Конечно, такое превращение математической теории из «существительной» в «прилагательную» протекает по-разному. Например, теория игр, теория информации, математическое программирование, теория оптимального управления возникли из практических задач и сразу получили важные практические приложения. А комплексным числам предстоял еще долгий путь, прежде чем они стали аппаратом для решения прикладных задач.

**Комплексные числа и тригонометрия.** В начале XVIII века тригонометрия была развивающейся наукой, а не лишь учебным предметом. Многие математики искали новые тригонометрические тождества, новые свойства тригонометрических функций. Очень интересные формулы открыл француз Муавр.

Рассматривая связь между  $\cos nx$  и  $\cos x$ , он вывел формулу

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n,$$

связывающую тригонометрические функции с мнимыми числами. С ее помощью легко найти, например,  $\cos 3x$ . Для этого достаточно написать, что

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x).\end{aligned}$$

А теперь уже видно, что

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \\ \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.\end{aligned}$$

К началу XVIII века комплексные числа получили всеобщее признание — слишком много результатов получалось с их помощью. Математики спокойно складывали и умножали, вычитали и делили комплексные числа и даже извлекали из них корни. Но, чтобы эти числа окончательно вошли в науку, надо было научиться применять к ним остальные операции анализа — находить степени с мнимыми показателями, синусы и косинусы от мнимых чисел и т. д. Путь к этому открыло применение степенных рядов, т. е. бесконечных сумм, состоящих из слагаемых вида  $a_n x^n$ .

**Степенные ряды.** С простейшим степенным рядом читатель уже знаком — это бесконечная геометрическая прогрессия

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

Сложив  $n$  членов этой прогрессии, получим  $1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ . Если увеличивать число слагаемых, то в зависимости от значения  $x$  возможны два случая: 1) при  $|x| > 1$  модуль суммы будет неограниченно увеличиваться, равно как и при  $x = 1$ , а при  $x = -1$  будем получать поочередно суммы 1 и 0; 2) при  $|x| < 1$  выражение  $x^n$  стремится к нулю с возрастанием  $n$ , и в пределе получим:

$$1 + x + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x}. \quad (1)$$

Применяя к этой формуле операции дифференцирования и интегрирования, можно получить много других



формул. Если заменить в формуле (1)  $x$  на  $-x$  и почленно проинтегрировать от нуля до  $x$ , то получим:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \dots \quad (2)$$

А если почленно продифференцировать формулу (1), то найдем:

$$1 + 2x + \dots + (n-1)x^{n-2} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Обе эти формулы истинны лишь при  $|x| < 1$ . Но формула (2) верна и при  $x = 1$ :

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \quad (3),$$

Вычислять по этой формуле  $\ln 2$  очень неудобно: чтобы получить ответ с четырьмя знаками после запятой, надо сложить по крайней мере 10 000 членов ряда (3). Поэтому на практике для расчета стараются использовать ряды, дающие уже после сложения небольшого числа членов ответ с высокой точностью.

Чтобы разложить функции в степенные ряды, часто применяли *метод неопределенных коэффициентов*. Для этого писали разложение функции в ряд с неизвестными заранее коэффициентами, а потом находили их значения, используя свойства функции. Например, если подставить ряд

$$e^x = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

в дифференциальное уравнение  $y' = y$ , которому удовлетворяет показательная функция  $y = e^x$ , то получится, что  $a_{n-1} = na_n$ . А так как, кроме того,  $e^0 = 1$  и потому  $a_0 = 1$ , то  $a_n = \frac{1}{n!}$ . Так получается разложение в ряд функции  $e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (4)$$

Точно так же из дифференциального уравнения  $y'' +$

$+y=0$ , которому удовлетворяют функции  $y=\sin x$  и  $y=\cos x$ , выводят разложения:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad (6)$$

С точки зрения строгого критика все проведенные рассуждения никуда не годятся — мы не доказывали, что бесконечные ряды можно почленно дифференцировать, не проверяли, что существует лишь одно разложение функции в степенной ряд, а самое главное, начали все рассуждения с того, что предположили возможность такого разложения. Поэтому полученную формулу лучше было бы прочитать так: «Если  $e^x$  (или  $\sin x$ , или  $\cos x$ ) можно разложить в степенной ряд, то этот ряд должен иметь установленный нами вид».

В XVIII веке с рядами работали, не думая ни о каких строгих выводах, спокойно обращаясь с ними, как с конечными суммами. Но к концу этого века появились первые признаки неблагополучия. В руках не слишком даровитых учеников великих ученых бесконечные ряды оказались слишком острым оружием, и наряду с правильными результатами стали в большом количестве появляться равенства, смысла которых никто не мог объяснить.

Лишь в результате работ Гаусса (1777—1855), Абеля (1802—1829) и Коши в обращении с бесконечными рядами был наведен порядок. Когда Коши впервые выступил в Парижской Академии наук, критикуя легкомысленное обращение с бесконечными рядами, он так потряс Лапласа, что этот великий ученый поспешил домой, чтобы проверить ряды в своей «Небесной механике». Ведь в этой науке, которая всем кажется образцом точности (не зря говорят «с астрономической точностью»), расчеты основаны на разложениях в ряды и отбрасывании малых слагаемых. Но у Лапласа все обошлось благополучно, он-то понимал, какими рядами можно пользоваться для вычислений, а какими нельзя.

**Поразительная формула.** Поэт сказал:

«Есть тонкие властительные связи  
Меж контуром и запахом цветка».

(В. Я. Брюсов. «Сонет к форме»)

Еще тоньше, властительнее, а зачастую и неожиданнее связи между числами. Ну что может быть общего между числами  $\pi$  и  $e$ ? Одно из них встречается в выражении для длины окружности, другое — в законе органического роста, и вроде бы им не с чего сталкиваться в одной и той же формуле. А все-таки они очень часто выступают вместе. Известный американский физик, лауреат Нобелевской премии Эуген Вигнер рассказывает такую историю:

«Встретились как-то два приятеля, знавшие друг друга еще со школьной скамьи, и разговорились о том, кто чем занимается.

Один из приятелей стал статистиком и занимался прогнозами численности населения. Оттиск одной из своих работ статистик подарил своему бывшему соученику. Начиналась работа, как обычно, с гауссова распределения вероятностей<sup>1</sup>. Статистик растолковал своему приятелю смысл используемых в работе обозначений для истинных показателей народонаселения, для средних и так далее. Приятель был немного недоверчив и отнюдь не был уверен в том, что статистик его не разыгрывает.

— Откуда тебе известно, что все обстоит именно так, а не иначе? — спросил он. — А что это за символ?

— Ах, это, — ответил статистик, — это число  $\pi$ .

— А что оно означает?

— Отношение длины окружности к ее диаметру.

— Ну, знаешь, говори, да не заговаривайся, — обиделся приятель статистика. — Какое отношение имеет численность народонаселения к длине окружности?»

Но, как ни удивительна встреча чисел  $e$  и  $\pi$  в вопросах теории вероятностей, еще удивительнее другая формула, в которую, кроме них, входит мнимая единица  $i$ :

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Как писали американские ученые Э. Кезнер и Дж. Ньюмен:

«Эта знаменитая формула — возможно, самая компактная и знаменитая из всех формул — была обнаружена Эйлером еще до открытия ее де Муавром. Хотя эта формула де Муавра была к тому времени известна более

---

<sup>1</sup> Оно имеет вид  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

столетия, для Бенджамена Пирса<sup>1</sup> она явилась чем-то вроде откровения. Обнаружив ее, он обратился к своим студентам с такими словами: «Джентльмены, это, наверно, правда, но она абсолютно парадоксальна; мы не можем понять ее, и мы не знаем, что она значит, но мы доказали ее, и поэтому мы знаем, что она должна быть достоверной».

В том, что эта формула производит ошеломляющее впечатление при первом знакомстве, с ними можно согласиться. В ней идет речь о возведении чисел в мнимую степень. И даже тем из читателей, кто уже привык возводить числа в степени с дробными показателями, может быть странным предложение возвести число в степень с показателем  $\pi i$ . И все-таки это не столь уж сложно. Для этого надо только вспомнить формулу (4) на с. 177 для  $e^x$  и заменить в ней  $x$  на  $\pi i$ :

$$e^{\pi i} = 1 + \pi i + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \dots = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \dots + \\ + i \left( \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \dots \right).$$

Если взять теперь в правой части этого равенства достаточно много слагаемых, то ответ будет сколь угодно мало отличаться от  $-1$ , а это и значит, что  $e^{\pi i} = -1$ .

**Формула Эйлера.** Разумеется, численную проверку формулы  $e^{\pi i} + 1 = 0$  нельзя считать строгим доказательством. В математике есть утверждения, проверенные на вычислительных машинах с большой точностью, однако остающиеся и по сей день недоказанными. Поэтому надо дать исчерпывающее доказательство равенства Муавра. Мы не только сделаем это, но и получим еще более общую формулу, а именно докажем, что

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (1)$$

Для этого достаточно заменить в разложении

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

---

<sup>1</sup> Известный американский математик XIX века.

число  $x$  на  $ix$  и отделить друг от друга действительные и мнимые числа. Получим:

$$e^{ix} = \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + i \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right).$$

Но ряд в первой скобке является разложением для  $\cos x$ , а ряд во второй скобке — для  $\sin x$ , потому равенство (1) доказано. Это равенство называют *формулой Эйлера*, хотя исследование бумаг, оставшихся после безвременной смерти английского математика Котеса (1682—1716), показало, что он владел этой формулой до Эйлера. Пожалуй, не зря Ньютон сказал после его кончины: «Если бы Котес пожил еще, мы узнали бы кое-что новое».

Положив в формуле Эйлера  $x = \pi$ , получаем уже знакомую нам формулу  $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$ . Формула Эйлера позволяет возводить число  $e$  в любую комплексную степень, например:

$$e^{2 + \frac{\pi}{4}i} = e^2 e^{\frac{\pi}{4}i} = e^2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{e^2 \sqrt{2}}{2} (1 + i).$$

Из нее легко вывести, что

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \quad (2)$$

Складывая формулы (1) и (2) и деля сумму пополам, получим выражение для  $\cos x$ :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (3)$$

Аналогично получаем для  $\sin x$ :

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (4)$$

Формулы (1), (2), (3), (4) верны не только для действительных, но и для комплексных значений  $x$ . В частности, из формулы (3) получаем

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1,6.$$

Значит, высказываемое в школе утверждение, что значения косинуса не превышают единицы, верно лишь при дополнительном условии — аргумент должен принимать действительные значения. А в комплексной области значения косинуса могут быть сколь угодно велики.

Формула Эйлера позволяет доказать одно свойство показательной функции, о котором нельзя было бы догадаться, оставаясь в действительной области: эта функция периодична! Только период у нее мнимый, он равен  $2\pi i$ . В самом деле, по формуле Эйлера  $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ , а потому

$$e^{x+2\pi i} = e^x e^{2\pi i} = e^x.$$

Наконец, та же формула Эйлера позволяет отыскивать логарифмы комплексных (и, в частности, отрицательных) чисел. Например, из равенства  $e^{\pi i} = -1$  можно сделать вывод, что  $\ln(-1) = \pi i$ . Впрочем, здесь нужна осторожность. В силу периодичности показательной функции для любого целого числа  $k$  верно равенство  $e^{\pi i + 2k\pi i} = -1$ , а потому с тем же успехом можно считать, что  $\ln(-1) = 3\pi i, 5\pi i$  и т. д. Вообще, каждому комплексному числу (кроме нуля) соответствует не одно, а бесконечно много значений логарифма.

Итак, в комплексной области основные элементарные функции тесно связаны друг с другом; теперь понятно, почему в одних случаях движение точки в сопротивляющейся среде описывается тригонометрическими функциями, а в других — показательной функцией.

Формула Муавра сразу следует из формулы Эйлера, так как ее можно переписать следующим образом:

$$e^{inx} = (e^{ix})^n.$$

Отметим еще, что комплексные числа позволяют записать в более компактной форме и ряды Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

Конечно, теперь приходится суммировать не от нуля, а от  $-\infty$ , но зато все члены устроены одинаковым образом.

**Царь математиков и землемер.** «Гаусс напоминает

мне образ высочайшей вершины горного хребта. В горной цепи отдельные вершины поднимаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на многие десятки километров далеко проникают его отроги и стекающие с него потоки несут с собой влагу и жизнь», — так писал о Гауссе видный немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925).

Надо сказать, что ученые обычно довольно сдержанны в проявлении своих эмоций, во всяком случае в печатных работах. Так что попусту такие слова, какие Клейн сказал о Гауссе, не произносятся. Роль Гаусса в завершении математики XVIII века и развитии ее в XIX веке несоизмерима с ролью кого-либо из его современников. И многие открытия, из-за которых молодые ученые вели приоритетные споры, мирно лежали в неопубликованных бумагах Гаусса, полученные еще тогда, когда юных соперников не было на свете. Гаусс был очень требователен к себе и не торопился публиковать свои результаты.

Конечно, Гаусс не мог пройти мимо проблем теории функций комплексного переменного — слишком важны они были для математики его времени. Еще будучи студентом, Гаусс сделал замечательное открытие в математике: он установил, что *каждый многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на множители первой и второй степени*. Для этой теоремы Гаусс дал несколько доказательств. Но уже первое из них, опубликованное в 1799 году, по сути дела, опиралось на теорию комплексных чисел. Правда, Гаусс еще смолodu умел «прятать концы в воду» — нигде на протяжении всей работы ничего не говорится о комплексных числах, а там, где они должны были встретиться, он объединил их парно, так, чтобы все мнимости исчезли.

Дело в том, что Гаусс не был уверен в логической обоснованности теории комплексных чисел, а он, как уже говорилось, был очень требователен к себе и всю жизнь придерживался принципа «Ничего не считать сделанным, если еще кое-что осталось сделать». Многие математики смотрели на дело иначе. Например, Якоби, младший современник Гаусса, говаривал своим ученикам: «Господа, для гауссовской строгости у нас нет времени».

Позднее Гаусс придумал геометрическое истолкование

комплексных чисел, позволившее сразу обойти все трудности. Он предложил изображать число  $x + iy$  точкой на плоскости, имеющей координаты  $x$  и  $y$ . Полярные координаты этой точки получили названия *модуля* и *аргумента* числа  $z = x + iy$ . При этом модуль вычисляется по формуле  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а аргумент  $\varphi$  — по формулам:  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ . Само же число  $z$  можно записать так:

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

А если вспомнить, что по формуле Эйлера  $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ , то получаем совсем удивительную запись комплексных чисел:

$$x + iy = re^{i\varphi}.$$

Следует сказать, что еще до Гаусса такое же изображение комплексных чисел предложил скромный датский землемер Вессель (1745—1818). Однако никто не обратил на это внимания — работа Весселя была опубликована по-датски, а сам Вессель никому не был известен. Такая же судьба постигла французского математика Аргана (1768—1822), предложившего аналогичное истолкование в 1806 году. Но когда Гаусс опубликовал в 1831 году свое истолкование комплексных чисел и дал глубокое обоснование их теории, а также важные приложения этой теории к высшей арифметике, они вошли в математику как равноправные члены сообщества математических понятий.

Полученное Гауссом, Весселем и Арганом геометрическое истолкование комплексных чисел показало, почему так долго не удавалось найти для них практические приложения. Их старались применить к величинам, изображаемым точками на числовой оси (температуре, расстоянию, массе и т. д.), а для таких величин достаточно действительных чисел. Комплексные же числа полезны, если величина изображается точкой на плоскости или плоским вектором. Вскоре выяснилось, что таких величин очень много. Теория функций комплексного переменного нашла приложения и при изучении течения жидкости, и в теории упругости, и в картографии.

**География и математика.** Далекие заокеанские путешествия заставили картографов задуматься над точ-



ностью своих атласов. Из-за небольшой ошибки в положении острова на карте корабль мог разбиться на рифах, оказавшихся там, где карта показывала морскую пучину. Мореходы издавна мечтали о карте, абсолютно точно изображающей земную поверхность. Но даже сферу нельзя точно перенести на плоскость — при этом обязательно искажаются расстояния. А что уж говорить об эллипсоиде вращения или еще более сложных поверхностях!

Впрочем, для мореплавателей часто было достаточно, чтобы на карте строго сохранялись «земные» направления. Корабль вели по компасу, и если угол между курсом корабля на карте и меридианами на ней совпадал с его прообразом на земной поверхности, то было уже неплохо. В частности, параллели и меридианы на картах должны были пересекаться под прямыми углами, так как на земной поверхности эти углы всегда прямые.

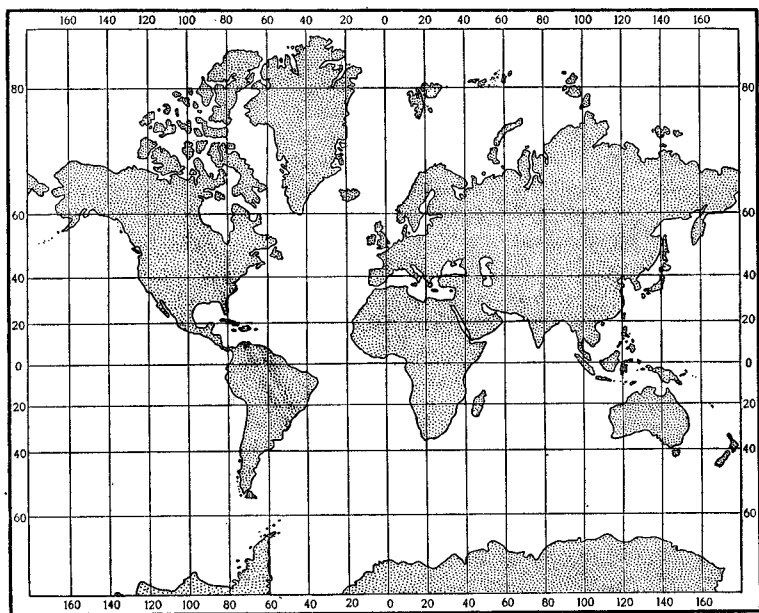


Рис. 74

Карты, на которых сохраняются углы между линиями, сейчас называются *конформными* (сохраняющими форму). На таких картах маленькие участки земной поверхности изображаются подобными им фигурами: маленькие квадраты — маленькими квадратами, маленькие окружности — маленькими окружностями и т. д. Но при переходе к большим фигурам подобие нарушается, и иногда маленькие страны или острова занимают на карте куда больше места, чем большие.

Первую конформную карту создал в 1569 году фламандский картограф Меркатор. Эта карта изображена на рисунке 74. На ней Гренландия занимает примерно такой же кусок, что и Южная Америка, хотя на самом деле ее площадь в семь раз меньше. Но зато с углами все в порядке — читатель видит, например, что все углы между меридианами и параллелями на этой карте прямые.

Ни Северный, ни Южный полюсы на карту Меркатора не попали — они изображаются на ней бесконечно удаленными точками (поэтому так росли площади приполярных областей). Для плавания в арктических широтах удобнее карта, полученная с помощью стереографической проекции, — сфера проектируется при этом из Южного полюса на плоскость, касающуюся земной поверхности в Северном полюсе. Эта проекция тоже конформна, но параллели изображаются уже не прямыми линиями, а окружностями (рис. 75).

Общую теорию конформных проекций создал в 1777 году Эйлер (сам термин «конформные преобразования» был введен 12 лет спустя геометром Шубертом). Чтобы получить все конформные карты земной поверхности, достаточно знать одну из них (например, Меркатора или стереографическую) и найти все конформные преобразования плоскости, т. е. геометрические преобразования, сохраняющие углы между линиями. К числу таких преобразований относятся, конечно, движения плоскости и даже все преобразования подобия (ведь подобие и означает, в частности, сохранение углов). А сжатие плоскости к оси абсцисс, при котором точка  $M(x; y)$  переходит в точку  $M'(kx; y)$ , конформным преобразованием не является — в этом легко убедиться, посмотрев, в какую прямую переходит при этом преобразовании, например, биссектриса первого координатного угла.

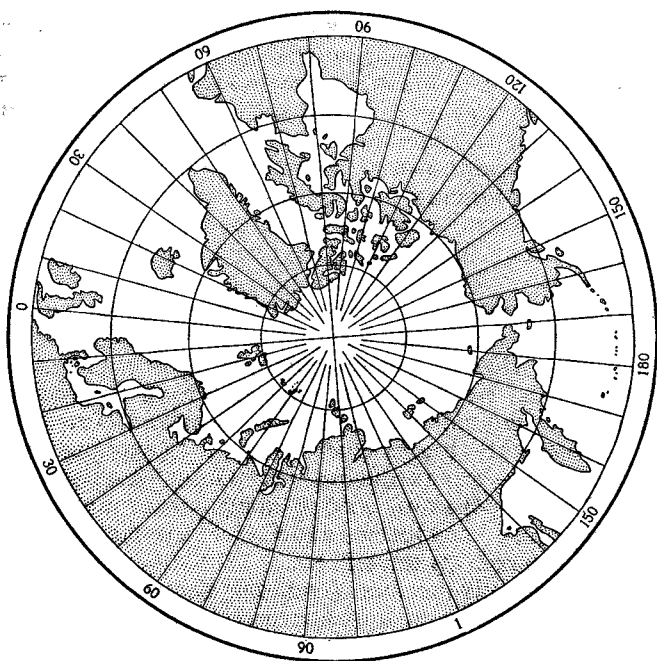


Рис. 75

Существует замечательный способ получения конформных преобразований плоскости. Достаточно взять любой многочлен  $P(z)$  и положить  $w = P(z)$ . Если считать в этом равенстве  $z$  и  $w$  комплексными числами,  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , то оно позволяет поставить в соответствие каждой паре чисел  $(x; y)$  пару чисел  $(u; v)$ . Рассматривая эти числа как координаты точек на плоскости, можно сказать, что равенство  $w = P(z)$  задает геометрическое преобразование, при котором точка  $M(x; y)$  переходит в точку  $M'(u; v)$ . Например, пусть  $w = z^2 + 1$ . Чтобы найти образ точки  $M(1; 2)$  при этом преобразовании, положим  $z = 1 + 2i$  и найдем  $w = (1 + 2i)^2 + 1 = -2 + 4i$ . Этому комплексному числу соответствует точка  $M'(-2; 4)$ . Значит, при преобразовании  $w = z^2 + 1$  точка  $M(1; 2)$  переходит в точку  $M'(-2; 4)$ .

Можно доказать, что, какой бы многочлен  $P(z)$  мы ни взяли, соответствующее ему геометрическое преобра-

зование плоскости окажется конформным<sup>1</sup>. А самые общие конформные преобразования задаются формулами вида  $w = f(z)$ , где  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , а  $f$  — функция, которую можно представить в виде суммы степенного ряда («многочлена конечной или бесконечной степени»). Например, конформными являются преобразования, задаваемые формулами  $w = e^z$ ,  $w = \sin z$ ,  $w = \ln(1 + z)$  и т. д. В частности, переход от стереографической проекции к проекции Меркатора задается логарифмической функцией.

Если быть совсем точными, то к преобразованиям вида  $w = f(z)$  следовало бы прибавить и преобразования вида  $w = \bar{f}(z)$ . Но эти преобразования, хотя и сохраняют величины углов, меняют направления углов на противоположные. Функции, являющиеся суммами степенных рядов, называют *аналитическими*, а функции вида  $w = \bar{f}(z)$ , где  $f$  — аналитическая функция, *антианалитическими*. Таким образом, любое конформное преобразование плоскости задается либо аналитической, либо антианалитической функцией.

Так как аналитических функций бесконечно много, то для любой страны можно построить бесконечное множество конформных проекций. Когда задача имеет много решений, всегда возникает желание выбрать из них в каком-то смысле наилучшее. Для географических карт знаменитый русский математик П. Л. Чебышев в 1856 году поставил и решил следующую проблему: *найти такое конформное изображение данной страны, чтобы искажение масштаба на ее территории оказалось минимальным*. Без доказательства он сообщил, что для этого нужно, чтобы масштаб во всех точках границы был одним и тем же. Великий ученый умер, не успев опубликовать доказательство этой теоремы. Долгие годы многие математики пытались его найти и в конце концов стали сомневаться в правильности утверждения Чебышева. Лишь в 1896 году русский математик Д. А. Граве (1863—1939) сумел восстановить утраченное доказательство.

В течение многих лет полагали, что результат Чебышева имеет лишь теоретическое значение — слишком

---

<sup>1</sup> На самом деле конформность отображения нарушается в точках, в которых производная многочлена равна нулю. Но таких точек лишь конечное число и мы не будем останавливаться на этом вопросе подробно.

велики были вычислительные трудности для получения его проекций. Но после создания быстродействующих вычислительных машин эти трудности удалось преодолеть.

**Гидродинамика и упругость.** В 1899 году шло весеннее собрание английского Общества корабельных инженеров. На нем норвежец Брун прочитал сообщение о влиянии вырезов и отверстий в палубах на общую крепость судов. Незадолго перед этим громадный пароход переломился в нескольких милях от Нью-Йорка, столкнувшись с парусником. Эта катастрофа была еще свежа в памяти у всех присутствовавших, и, понятно, доклад был прослушан с особенным интересом.

Браун взял продолговатый лист резины, разграфил его на квадраты и сделал в нем вырезы различной формы. После этого, растянув лист в продольном направлении, он изучил кривые, в которые обратились начерченные на листе прямые линии. Эти линии показывали распределение деформаций, а значит, и напряжений. Брун предложил изучать влияние отверстий всевозможных форм, делая подобные модели.

Среди слушателей был Алексей Николаевич Крылов. Он вспомнил, как на прошлогоднем заседании того же Общества профессор Хел-Шоу показывал прибор, позволявший с удивительной отчетливостью проектировать на экран струйное течение жидкости и показывать обтекание этими струями разного рода препятствий. Случайно один из вырезов у Бруна был взят совершенно такой же формы, как одно из препятствий в опытах Хел-Шоу, и Крылов заметил, что кривые Бруна совпадают со струйными линиями Хел-Шоу.

Крылов достал сообщения Общества за предыдущий год, попросил слова и объяснил, что это совпадение отнюдь не случайное. Оказалось, что способ Бруна давал механическое, а способ Хел-Шоу — гидродинамическое решение одной и той же математической задачи. Поэтому не было надобности делать такие сложные модели и тянуть потом резину, а стоило только соответствующей формы препятствие вставить в прибор Хел-Шоу и сфотографировать струйные линии — вся картина деформации получится автоматический. Такое сопоставление явлений из совершенно разных областей было неожиданным для собрания — там сидели инженеры, а не математики, и только А. Н. Крылов счастливо сочетал

обширные математические познания с талантом корабельного инженера.

Впоследствии ту же задачу академик Н. Н. Павловский решил с помощью электричества, найдя силовые линии в проводящей пластинке, снабженной вырезами данной формы.

Что же является общим для задач теории упругости, гидродинамики, теории электричества? Почему решение задачи из одной области сразу приводит к решению подобных задач из других областей? Дело в том, что все эти явления описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями, а эти уравнения тесно связаны с теорией функций комплексной переменной.

Сейчас трудно указать область физики, техники, механики, где не применялись бы комплексные числа, методы теории функций комплексной переменной — рассчитывается ли движение самолета в воздухе, корабля в океане, электрическая цепь или сложное сооружение. И часто бывает, что продвижение в одной области, например в теории упругости, влечет за собой успех в соседних областях — в гидродинамике, аэродинамике или ядерной физике.

**Новые функции.** До сих пор мы рассказывали о приложениях тех функций, которые изучаются в школе. Их называют элементарными функциями. Но многие задачи неразрешимы в элементарных функциях. Например, с помощью таких функций нельзя выразить длину дуги эллипса, зная его полуоси  $a$  и  $b$ . Для этого нужно было бы вычислить интеграл

$$\int \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

или интеграл вида

$$\int \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}{1-x^2} dx, \quad (1)$$

к которому он сводится. Однако все попытки математиков XVIII и начала XIX века выразить этот интеграл через такие функции, как  $y = e^x$ ,  $y = \ln x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \arcsin x$  и т. д., успеха не имели. Объяснение этому было дано лишь в середине XIX века, когда в работах великого русского ученого П. Л. Чебышева и других математиков было выяснено, в каких случаях интегралы

от элементарных функций выражаются через элементарные же функции, а в каких — нет.

Но уже в конце XVIII века были выделены интегралы, обобщавшие интегралы вида (1), а именно

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx,$$

где  $R(x, y)$  — рациональная функция от  $x$  и  $y$ , а  $P(x)$  — многочлен четвертой степени. Такие интегралы называли *эллиптическими*, потому что впервые они встретились при вычислении длины дуги эллипса.

Замечательный норвежский математик Нильс Хенрик Абель, который скончался в 1829 году, не дожив до двадцати семи лет, предложил вместо эллиптических интегралов рассматривать обратные им функции (это аналогично переходу от функций вида  $y = \arcsin x$  к тригонометрическим функциям). Новые функции он назвал *эллиптическими*. Теорией эллиптических функций занимались многие математики XIX века — Б. Риман, К. Якоби (1804—1851), Вейерштрасс и другие.

Знаменитая Софья Ковалевская (1850—1891) с помощью эллиптических и еще более общих функций решила стоявшую долгие годы перед математиками задачу о движении волчка. За эту работу она была удостоена премии, установленной Парижской Академией наук.

Задачи о колебаниях однородных цепей и круглых упругих мембран привели ученых XVIII века к изучению особого вида функций. Эти же функции встретились впоследствии при изучении движения планет, при решении задач теплопроводности и т. д. Систематически они были изучены немецким ученым Бесселем (1784—1846) и теперь носят его имя.

Сейчас в естествознании применяют громадное количество самых разнообразных функций. Для каждой из них выведено необозримое число формул. И только сейчас стали развивать подходы, позволяющие изучать весь этот хаос функций и относящихся к ним формул с общих позиций. Но это уже область современной математики, далеко выходящая за рамки данной книги.

Н. Я. ВИЛЕНКИН

# Функции в природе и технике

*Книга для внеклассного чтения*

*IX—X классов*

*Издание второе, исправленное*



ББК 22.16  
В44

Рецензент

кандидат педагогических наук *Б. А. Кордемский* (Москва)

**НАУМ ЯКОВЛЕВИЧ ВИЛЕНКИН**

**ФУНКЦИИ В ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ**

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*, редактор *Л. В. Туркестанская*  
Мл. редактор *Н. Т. Протасова*, художник *Б. Н. Юдкин*  
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*  
Технический редактор *М. М. Широкова*  
Корректоры *О. С. Захарова*, *К. А. Иванова*

ИБ № 8807

Сдано в набор 15.10.84. Подписано к печати 26.04.85. Формат  $84 \times 108^{1/32}$ . Бумага кн.-журн.  
отеч. Гарнит. литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 10,08. Усл. кр.-отт. 10,50. Уч.-изд.  
л. 9,74. Тираж 110 000 экз. Заказ № 861. Цена 30 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного  
комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете  
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

---

**Виленкин Н. Я.**

**В44**      **Функции в природе и технике: Кн. для внеклас.**  
**чтения IX—X кл. — 2-е изд., испр. — М.: Просвеще-**  
**ние, 1985. — 192 с. — (Мир знаний).**

В книге рассказывается о различных приложениях элементарных функций, изучаемых в школе, о развитии и применении дифференциального и интегрального исчисления, о том, как математики ищут оптимальные решения задач.

**В**      **4306020400—510**      **163—85**  
         **103(03)—85**

**ББК 22.16**  
**517.2**

© Издательство «Просвещение», 1978 г.

© Издательство «Просвещение», 1985 г., с изменениями